Mathématiques - mercredi 1er avril 2026
Devoir n°7 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet comporte 2 pages et est constitué de 3 exercices indépendants.**
- **Pensez à vous relire et à encadrer les résultats à la fin de chaque exercice.**

Exercice 1.

1. *Probabilités*
   (a) Quand dit-on que deux événements A et B sont indépendants ?
   (b) Démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.
2. *Continuité*
   Soit $f : x \longmapsto \ln(2 - e^{-x})$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
   (b) Justifier par une phrase que f est continue sur D.
3. *Espaces vectoriels*
   (a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et soit $u \in E$. Qu'appelle-t-on coordonnées de u dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$?
   (b) Soient $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On admet que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Quelle est la matrice dont les coordonnées dans cette base sont $(-1, 1, 3)$?

Exercice 2.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 3, 1) \ ; \ u_2 = (1, -1, 1) \ ; \ u_3 = (1, 1, 1) \ ; \ w = (1, 4, 2).$$

On définit :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de F.
   (c) Déterminer la dimension de G.
2. (a) Montrer que $w \in F$.
   (b) Montrer que $w \notin G$.
   (c) En déduire que $F \cap G \neq F$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1) \subset F \cap G$.
   (b) En déduire que $1 \leq \dim(F \cap G) \leq 2$.
   (c) En utilisant la question 2.(c), en déduire que $\dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 3.
On dispose de deux pièces indiscernables : l'une équilibrée et l'autre truquée de sorte qu'elle donne Face avec probabilité $p > \frac{1}{2}$. On effectue une série de trois lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer. On gagne le jeu lorsqu'on obtient Face au troisième lancer.
Le but de l'exercice est de comparer trois stratégies et de décider laquelle maximise nos chances de gagner le jeu.

Dans tout le sujet, les questions de Python sont signalées par le symbole $*$. On suppose de plus que la bibliothèque `random` *a été importée sous l'alias* `rd`*, on ne demande donc pas de le rappeler.*

On note pour $k \in [\![1, 3]\!]$:

- E_k l'événement "on choisit la pièce équilibrée au k-ème lancer", et
- F_k l'événement "on obtient Face au k-ème lancer".

0. Questions préliminaires :

   $*$(a) Écrire une fonction Python `piece` prenant en argument p et simulant le lancer de la pièce truquée. Votre fonction renverra une chaîne de caractères indiquant le résultat de la pièce. Comment simuler le lancer de la pièce non truquée avec la fonction `piece` ?

   (b) Démontrer que $\mathbb{P}(F_k) = p + \mathbb{P}(E_k) \times \dfrac{1-2p}{2}$.

1. Stratégie 1 : on suppose qu'à chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.

   $*$(a) Un élève propose la fonction Python suivante pour simuler la stratégie 1 et renvoyer la liste des résultats des lancers obtenus.

```
def strat_1(p):
    q = rd.choice(p, 0,5)
    PF = piece(q)
    return [PF, PF, PF]
```

   Expliquer et corriger les erreurs commises par cet élève. *On recopiera sur la copie l'entièreté de la fonction corrigée.*

   $*$(b) En utilisant la fonction `strat_1`, écrire un programme Python permettant d'estimer la probabilité de gagner le jeu en suivant cette stratégie.

   (c) Montrer que pour cette stratégie $\mathbb{P}(F_3) = \dfrac{2p+1}{4}$.

2. Stratégie 2 : au premier lancer on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient Face, on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.

   $*$(a) Écrire une fonction Python `strat_2` prenant en argument la valeur de p et simulant cette stratégie. Votre fonction renverra la liste des résultats des lancers obtenus.

   (b) Que valent les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{E_1}(E_3)$ et $\mathbb{P}_{\overline{E_1}}(E_3)$?

   (c) En déduire $\mathbb{P}(E_3)$.

   (d) Montrer que pour cette stratégie $\mathbb{P}(F_3) = \dfrac{4p^2+3}{8}$.

3. Stratégie 3 : au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis, à chacun des lancers suivants, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu Face, sinon, on change de pièce.

   (a) Pour $k \in \{1, 2\}$, exprimer $\mathbb{P}(E_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_k)$ et de p.

   (b) En déduire $\mathbb{P}(E_3)$.

   (c) Montrer que pour cette stratégie $\mathbb{P}(F_3) = \dfrac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16}$.

4. Comparer les stratégies 1, 2 et 3.