Corrigé DS 7

Exo 1 :

1) a) Les événements A et B sont dits indépendants lorsque $\boxed{\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$.

b) Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}$ donc,

$\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1-\mathbb{P}(A\cup B) = 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)) = 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))$

$= 1-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(B) = 1-\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A)) = (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))$

$= \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})$ donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2) a) On obtient pour $x\in\mathbb{R}$, $2-e^{-x}>0 \iff e^{-x}<2 \iff -x<\ln(2) \iff x>-\ln(2)$

Donc f est définie sur $\boxed{\mathcal{D} =]-\ln(2),+\infty[}$.

b) On a $f=\ln\circ v$ avec $v : x\mapsto 2-e^{-x}$. La fonction f est donc continue sur $\mathcal{D}$ en tant que composée des fonctions $\ln$ et v avec v continue sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ et $\ln$ continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

3) a) Les coordonnées de u dans la base $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ sont les scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_nu_n$.

b) Il s'agit de la matrice $M=-U+V+3W=\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}}$

Exo 2

1) a) On obtient pour $x,y,z\in\mathbb{R}$, $2x-y+z=0 \iff z=-2x+y$.

Donc $F=\{(x,y,-2x+y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec $\boxed{v_1=(1,0,-2) \text{ et } v_2=(0,1,1)}$.

Ceci prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) D'après la question a), la famille (v_1,v_2) engendre F. De plus v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires puisque pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda v_1=(\lambda,0,-2\lambda)\neq(0,1,1)=v_2$ (car $0\neq1$) et $\lambda v_2=(0,\lambda,\lambda)\neq(1,0,-2)=v_1$ (car $0\neq-2$). Donc (v_1,v_2) est libre.

Finalement (v_1,v_2) est une base de F et $\boxed{\dim(F)=2}$.

c) Par définition, (u_1,u_2,u_3) est une famille génératrice de G.

Mais cette famille n'est pas libre puisqu'on remarque que $u_3=\frac{1}{2}(u_1+u_2)$.

Ainsi $u_3\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et donc $G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$

Donc (u_1,u_2) est une famille génératrice de G. On montre ensuite comme à la question précédente que (u_1,u_2) est libre et donc une base de G, et $\boxed{\dim(G)=2}$

On pouvait aussi dire que, par définition du rang :

$\dim(G) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)) = \mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1)$ $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$

donc $\boxed{\dim(G) = 2.}$

2) a) On a $2\times 1 - 4 + 2 = 0$ donc $\boxed{w \in F.}$

b) Par l'absurde si $w \in G = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, il existerait $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ c'est-à-dire $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \end{cases}$ mais les lignes L_1 et L_3 sont contradictoires.

C'est donc que $\boxed{w \notin G.}$

c) Comme $w \in F \setminus G$ on a $F \not\subset F\cap G$ donc $\boxed{F \neq F\cap G}$.

3) a) Comme $2\times 1 - 3 + 1 = 0$ on a $u_1 \in F$; et comme $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ on a $u_1 \in G$.

Donc $u_1 \in F\cap G$. Mais $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (car c'est une intersection de sous-espaces vectoriels), donc cela implique que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u_1 \in F\cap G$.

Autrement dit $\boxed{\mathrm{Vect}(u_1) \subset F\cap G}$

b) On a $\mathrm{Vect}(u_1) \subset F\cap G \subset F$ donc $\dim(\mathrm{Vect}(u_1)) \leq \dim(F\cap G) \leq \dim(F)$.

Comme $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\dim(\mathrm{Vect}(u_1)) = 1$; et $\dim(F) = 2$ comme vu précédemment.

Ainsi $\boxed{1 \leq \dim(F\cap G) \leq 2}$

c) Si on avait $\dim(F\cap G) = 2$ alors on aurait $F\cap G \subset F$ et $\dim(F\cap G) = \dim(F)$, ce qui impliquerait que $F\cap G = F$. Or d'après la question 2c), $F\cap G \neq F$. C'est donc que $\boxed{\dim(F\cap G) = 1}$

Ex 3 :

0. (a)

```python
def piece(p):
    t=rd.random()
    if t<p:
        return "Face"
    else:
        return "Pile"
```

On peut simuler le lancer de la pièce non truquée en appelant piece(0.5)

(b) Dans le système complet d'événements $(E_k, \overline{E_k})$ on a

$$P(F_k) = P(E_k)\, P_{E_k}(F_k) + P(\overline{E_k})\, P_{\overline{E_k}}(F_k).$$

D'après l'énoncé $P_{E_k}(F_k) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{E_k}}(F_k) = p$.

De plus $P(\overline{E_k}) = 1 - P(E_k)$ donc

$$P(F_k) = P(E_k)\frac{1}{2} + (1-P(E_k))p = \boxed{p + P(E_k)\times\frac{1-2p}{2}}$$

1. (a) La fonction rd.choice prend en argument une liste et le nombre décimal $\frac{1}{2}$ s'écrit 0.5 en Python (et non 0,5). De plus, il faut faire appel 3 fois à la fonction piece pour pouvoir avoir des résultats différents.

On obtient donc :

```python
def strat_1(p):
    q=rd.choice([p, 0.5])
    return [piece(q) for k in range(3)]
```

(b)

```python
N=10000
c=0
for k in range(N):
    lancers = strat_1(p)
    if lancers[2]=="Face":
        c=c+1
print(c/N)
```

(c) Ici on choisit la pièce uniformément au hasard donc $P(E_3) = \frac{1}{2}$.

En utilisant la question 0.(b) on a donc

$$P(F_3) = p + \frac{1}{2}\times\frac{1-2p}{2} = \frac{4p+1-2p}{4} = \boxed{\frac{1+2p}{4}}$$

2. (a)

```
def strat_2(p):
    (q1, q2) = rd.choice([(p, 0.5), (0.5, p)])     # de sorte que (q1,q2)=(p,1/2) avec proba 1/2
    lancer1 = piece(q1)                             # et (q1,q2)=(1/2,p) avec proba 1/2
    if lancer1 == "Face":
        return [lancer1, piece(q1), piece(q1)]
    else:
        return [lancer1, piece(q2), piece(q2)]
```

(b) Si on a choisi la pièce équilibrée pour le 1er lancer alors on a une chance sur 2 de faire Face et donc de garder cette pièce pour le 3e lancer. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{E_1}(E_3) = \frac{1}{2}}$

Si on a choisi la pièce truquée pour le 1er lancer alors on a une probabilité de $1-p$ de faire Pile et donc de changer de pièce pour le 3e lancer. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{E}_1}(E_3) = 1-p}$

(c) Dans le système complet d'événements $(E_1, \overline{E}_1)$ on a

$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}_{E_1}(E_3) + \mathbb{P}(\overline{E}_1)\mathbb{P}_{\overline{E}_1}(E_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1-p) \quad \text{car } \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(\overline{E}_1) = \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{3-2p}{4}}$$

(d) D'après la question 1.(b) on a donc

$$\mathbb{P}(F_3) = p + \frac{3-2p}{4} \times \frac{1-2p}{2} = \frac{8p + 3 - 2p - 6p + 4p^2}{8} = \boxed{\frac{4p^2+3}{8}}$$

3) a) Dans le système complet d'événements $(E_k, \overline{E_k})$ la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_k)\,\mathbb{P}_{E_k}(E_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{E_k})\,\mathbb{P}_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$$

D'après l'énoncé, si on a choisi la pièce équilibrée au k^e tirage, alors on la garde au $(k+1)$-ème tirage à condition qu'elle ait donné Face, c'est-à-dire avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $\mathbb{P}_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{1}{2}$.

Et si on a choisi la pièce truquée au k^e tirage alors on change de pièce au $(k+1)$-ème tirage à condition qu'elle ait donné Pile, c'est-à-dire avec probabilité $1-p$. Ainsi $\mathbb{P}_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) = 1-p$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{k+1}) &= \mathbb{P}(E_k) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(\overline{E_k}) \times (1-p) \\ &= \mathbb{P}(E_k) \times \frac{1}{2} + (1-\mathbb{P}(E_k)) \times (1-p) \\ &= \mathbb{P}(E_k)\left(p-\frac{1}{2}\right) + 1-p\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_k) \times \frac{2p-1}{2} + 1-p}$

b) Comme au 1^{er} tirage on choisit la pièce uniformément au hasard on a $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}$. En utilisant la question précédente on obtient donc successivement :

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1) \times \frac{2p-1}{2} + 1-p = \frac{2p-1}{4} + \frac{4-4p}{4} = \frac{3-2p}{4}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_2) \times \frac{2p-1}{2} + 1-p &= \frac{(3-2p)(2p-1)}{8} + 1-p \\ &= \frac{6p-3-4p^2+2p+8-8p}{8}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(E_3) = \frac{5-4p^2}{8}}$

c) En utilisant encore la question 0) on obtient donc

$$\mathbb{P}(F_3) = \mathbb{P}(E_3) \times \frac{1-2p}{2} + p = \frac{(5-4p^2)(1-2p)}{16} + p$$

$$= \frac{5 - 4p^2 - 10p + 8p^3 + 16p}{16}$$

donc finalement $\boxed{\mathbb{P}(F_3) = \frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16}}$

4) Montrons que la stratégie 3) est meilleure que la 2) qui est meilleure que la 1) c'est-à-dire que

$$\frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16} \underset{(*_2)}{\geqslant} \frac{4p^2+3}{8} \underset{(*_1)}{\geqslant} \frac{2p+1}{4}$$

On rappelle que $p > \frac{1}{2}$, donc $p \in]\frac{1}{2}, 1]$.

<u>Pour $(*_1)$</u> : On a $\frac{4p^2+3}{8} - \frac{2p+1}{4} = \frac{1}{8}(4p^2+3-4p-2)$

$$= \frac{1}{8}(4p^2 - 4p + 1)$$

$$= \frac{1}{8}(2p-1)^2 \geqslant 0$$

donc $\frac{4p^2+3}{8} \geqslant \frac{2p+1}{4}$.

<u>Pour $(*_2)$</u> : On a $\frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16} - \frac{4p^2+3}{8} = \frac{1}{16} f(p)$

avec $f(p) = 8p^3 - 4p^2 + 6p + 5 - 8p^2 - 6 = 8p^3 - 12p^2 + 6p - 1$

La fonction f est dérivable sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et : $\forall p \in]\frac{1}{2}, 1]$

$f'(p) = 24p^2 - 24p + 6 = 6(4p^2 - 4p + 1) = 6(2p-1)^2 \geqslant 0$

donc f est croissante sur $]\frac{1}{2}, 1]$ et donc : $\forall p \in]\frac{1}{2}, 1]$,

$f(p) \geqslant f(\frac{1}{2})$. Or $f(\frac{1}{2}) = 8(\frac{1}{2})^3 - 12(\frac{1}{2})^2 + 6(\frac{1}{2}) - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

Donc on a $\frac{1}{16} f(p) \geqslant 0$ et donc $\frac{8p^3 - 4p^2 + 6p + 5}{16} \geqslant \frac{4p^2+3}{8}$