Exercice 1
En revenant à la définition du nombre dérivée, déterminer la dérivée des fonctions suivantes en tout point x_0 où elle existe :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. $x \longmapsto x^3$

Exercice 2
Justifier par une phrase que les fonctions suivantes sont dérivables sur leurs ensembles de définition et calculer leurs dérivées grâce aux formules du cours :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$
2. $f_2 : x \longmapsto \sqrt{e - e^x}$
3. $f_3 : x \longmapsto \ln(\ln(x))$

Exercice 3
Les fonctions suivantes sont-elles :

- continues ?
- dérivables ?
- de classe $\mathcal{C}^1$?

1. $f_1 : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ 4x-4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.
3. $f_3 : x \longmapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 1 \\ \ln(3-2x) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$
4. $f_4 : x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
5. $f_5 : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4
Soit $f : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer l'expression de f'.
2. Qu'en déduire sur f ?
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
4. Vérifier vos résultats en traçant le graphe de f sur Géogebra : `https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`

Exercice 5

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{2}\left((k+1)^{2/3} - k^{2/3}\right) \leq \dfrac{1}{k^{1/3}}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}$.

Exercice 6

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution sur $[0,1]$. On la note α.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \sin(1)^n$.
4. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice 8

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Justifier que (x_n) est bien définie en montrant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [1,2]$.
2. Si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, quelle(s) valeur(s) peut prendre ℓ ?
3. Montrer que pour tous $x, y \in [1,2],\ |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.
4. Montrer que (x_n) converge.