Feuille de cours 17 : dérivées n-èmes et régularité

1 Dérivée n-ème

Définition 1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f' est également dérivable sur I. Dans ce cas, on note $f^{(2)} = (f')'$ la dérivée de f', appelée dérivée seconde de f.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est dérivable n fois sur I lorsqu'on peut la dériver successivement n fois, et on définit sa dérivée n-ème, notée $f^{(n)}$ par récurrence par :

- $f^{(0)} = f$, et
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Remarque 2
Une autre notation pour $f^{(n)}$ est $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple 1

1. La fonction exp est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \longmapsto x^m$ est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

En effet, pour $n = 0$, cette formule donne bien $f^{(0)} = f$; et si cette formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

- si $n \leq m-1$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ avec $m-n \geq 1$ donc
- si $n = m$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)} = \dfrac{m!}{0!}x^0 = m!$ donc $f^{(n+1)}(x) = 0$;
- si $n > m$ alors $f^{(n)} = 0$ donc $f^{(n+1)} = 0$.

ce qui montre que la formule est bien vraie au rang $n+1$.

Remarque 3
Souvent pour déterminer l'expression de la dérivée n-ème d'une fonction, on intuite une formule en calculant les premières dérivées, puis on la démontre par récurrence.

Exercice 1
Déterminer la dérivée n-ème des fonctions suivantes $f : x \longmapsto e^{2x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Proposition 4
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et g sont dérivables n fois, alors :

1. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois, et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$,
2. fg est dérivable n fois,
3. si $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable n fois,
4. si g ne s'annule pas alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable n fois.

Démonstration :

1. Cela découle de la linéarité de la dérivation (et d'une récurrence).
2. Pour $n = 1$, le résultat est vrai puisqu'on a $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f et g sont deux fois dérivables alors on peut aussi écrire que
$$(fg)^{(2)} = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' = f^{(2)}g + f'g' + f'g' + fg^{(2)} = f^{(2)}g + 2f'g' + fg^{(2)}$$
On en déduit donc que si f et g sont 3 fois dérivables alors fg l'est aussi et que $(fg)^{(3)}$ s'exprime en fonction de $f, f', f^{(2)}, f^{(3)}$ et de $g, g', g^{(2)}, g^{(3)}$. Une récurrence permettrait de formaliser ce raisonnement [1].
3. Montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$, si f et g sont dérivables alors $g \circ f$ aussi, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons f et g dérivables $n + 1$ fois. Alors, g', f' et f sont dérivables n fois, et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est dérivable n fois, donc d'après 2. le produit $f' \times (g' \circ f)$ est dérivable n fois. Ainsi $(g \circ f)'$ est dérivable n fois, donc $g \circ f$ est dérivable $n + 1$ fois.
4. On applique 3. avec la fonction inverse pour obtenir que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable n fois, puis on applique le résultat 2. sur le produit $f \times \dfrac{1}{g}$.

1. il existe une formule pour $(fg)^{(n)}$ appelée formule de Leibniz mais qui est hors programme.

2 Régularité

Définition 5
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I}$, et on note $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou simplement $f \in \mathcal{C}^n(I)$, lorsque f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque 6

- Par exemple, dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I signifie que :
- Dans la définition de $\mathcal{C}^n$ on ne demande pas que les dérivées intermédiaires $f^{(k)}$ pour $k < n$ soient continues : elles le sont automatiquement puisqu'elles sont
- Pour $n = 0$, dire que f est $\mathcal{C}^0$ sur I signifie donc simplement que f est *continue* sur I. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 7
On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des telles fonctions f.

Exemple 2 Toute fonction polynomiale est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[) \cap \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$.

Remarque 8
Les résultats de la proposition 15 restent vrais en remplaçant “dérivable n fois” par “de classe $\mathcal{C}^n$”.
Par exemple, $f, g \in \mathcal{C}^n(I) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(I)$.

Moralité : les phrases justifiant qu'une fonction est dérivable (cf paragraphe 2) s'adaptent pour montrer qu'une fonction est dérivable n fois, ou de classe $\mathcal{C}^n$ (y compris $\mathcal{C}^0$, i.e.   ), ou de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 2
Justifier par une phrase que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

Remarque 9
Attention, $\boxed{\text{dérivable } n \text{ fois} \neq \text{de classe } \mathcal{C}^n}$ puisqu'être $\mathcal{C}^n$ requiert en plus la continuité de la dérivée n-ème. Si l'on note D^n l'ensemble des fonctions dérivables n fois on a : $D^n \subsetneq \mathcal{C}^n$. Voici ci-dessous un exemple dans le cas $n = 1$.

Exemple 3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet :

- la fonction f est dérivable en 0. En effet, pour $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc $f_g'(0) = 0$; et pour $x > 0$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
car

  donc $f_d'(0) = 0 = f_g'(0)$. Ainsi $f'(0) = 0$.
- et f' n'est pas continue en 0. En effet, pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \times (-\frac{1}{x^2}) \times \cos(\frac{1}{x}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$
avec $2x \sin(1/x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (même argument qu'au dessus) et $\cos(1/x)$ qui n'a pas de limite en 0 car

  donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

Notons toutefois que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur

Exercice 3
Les fonctions suivantes sont-elles :

- continues ?
- dérivables ?
- de classe $\mathcal{C}^1$?

sur leurs ensembles de définition.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{1 + |x|}$
2. $g : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ -x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$