Programme de colles : semaine 23, du 6/4 au 10/4

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Continuité

- continuité en un point du domaine, continuité à gauche / à droite, sur un ensemble *(la définition de la continuité avec des quantificateurs doit être comprise mais ne sera pas au cœur des exercices demandés)*
- prolongement par continuité en un point
- caractérisation séquentielle de la continuité.
  Application : soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.
- Savoir faire une phrase pour justifier qu'une fonction est continue en tant que somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues
- théorème des valeurs intermédiaires, preuve par dichotomie
  Reformulation : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  Application 1 : si f est une fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle I alors f est de signe constant sur I
  Application 2 : si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) = 0$. Un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.
- extrema sur un segment : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
- théorème de la bijection : soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f : I \longrightarrow J$ est bijective et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et de même monotonie que f
- étude de suites implicites du type $u_n = f^{-1}(n)$ ou $u_n = f_n^{-1}(0)$

2 Dérivabilité

Attention : *début de chapitre uniquement, les théorèmes sur la dérivabilité n'ont pas encore été abordés. Nous n'avons pas encore fait d'exercice sur ce chapitre en TD. On pourra demander des exercices pour s'assurer que les définitions sont connues ou réexploitant les calculs de limites.*

- définition et interprétation graphique comme coefficient directeur de la tangente. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- dérivée à droite/à gauche. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
- dérivable implique continue
- justification de la dérivabilité d'une fonction en tant que produit, somme, quotient, composée
- notion de dérivée n-ème. Exemple du calcul des dérivées n-ème de fonctions puissances
- notion de classe de régularité : f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsqu'elle y est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ y est continue. Régularité $\mathcal{C}^\infty$
- exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$: $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$
- exemples d'étude de régularité en un point de "recollement"

3 Informatique en langage Python

- Simulation d'expériences aléatoires avec la bibliothèque `random`.
  - fonctions : `rd.random()`,`rd.uniform(a,b)`,`rd.randint(a,b)`,`rd.choice(L)`,`rd.sample(L,k)`
  - méthode pour simuler un évènement de probabilité p quelconque *(à partir d'une v.a. uniforme)*
  - estimation d'une probabilité par une approche fréquentielle

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.
2. Qu'appelle-t-on coordonnées d'un vecteur dans une base ?
3. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs.
4. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions de "f est continue en x_0" et de "f est dérivable en x_0". Quelle notion implique l'autre ? Le démontrer.
5. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et l'expliquer sur un dessin.
6. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
7. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 11 (équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7019&v=fe3d2`

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.