Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants (2)

1 Rappels de cours

On a appris à résoudre des équations différentielles du type $y' + ay = b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
Souvent en sciences physiques, la dérivée y' est notée $\dfrac{dy}{dx}$ si y est une fonction de x, $\dfrac{dy}{dt}$ si y est une fonction de t, etc.

Reprenons la démarche de résolution sur un exemple.

Exercice 1
Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) + \dfrac{U(t)}{RC} = \dfrac{E}{RC} \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$

1. On résout d'abord l'équation homogène :

2. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'une constante :

3. On conclut en donnant les solutions de l'équation différentielle :

4. On utilise la condition initiale pour déterminer la valeur de K :

5. Finalement la solution du problème de Cauchy est :

En sciences physiques, on obtient souvent des solutions de la forme $y : t \longmapsto A - Be^{-Ct}$ avec $A, B, C > 0$, typiquement lorsque la quantité $y(t)$ croît avec t et admet une limite finie lorsque $t \to +\infty$, ici $\lim\limits_{t \to +\infty} A - Be^{-Ct} =$

Il faut être capable de tracer l'allure de cette solution sans calculatrice. Prenons pour exemple le cas où $B = C = 1$ et $A = 3$ c'est-à-dire $y : t \longmapsto 3 - e^{-t}$. Pour cela, traçons successivement sur le dessin ci-dessous les graphes de :

- $t \longmapsto e^{t}$
- $t \longmapsto e^{-t}$
- $t \longmapsto -e^{-t}$
- $t \longmapsto 3 - e^{-t}$

2 Exercices

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes en expliquant succinctement les étapes suivies :

1. $\dfrac{dy}{dt}(t) - 2y(t) = 3$
2. $\dfrac{dy}{dx}(x) - k\,y(x) = k$
3. $\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -k[A] \\ [A](T_0) = A_0 \end{cases}$
4. $RrC\dfrac{dU}{dt} + (r+R)U = ER$
5. $\begin{cases} RT\dfrac{dp}{dz} = -Mgp \\ p(0) = p_0 \end{cases}$
6. $\dfrac{RC_1C_2}{C_1+C_2}\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{q_0}{C_1+C_2}$

Exercice 3

Déterminer une équation différentielle dont les fonctions suivantes sont solutions et tracer l'allure de leurs graphes.

1. $y : t \longmapsto 2e^{t}$
2. $y : t \longmapsto e^{2t}$
3. $y : x \longmapsto 1 - e^{x}$
4. $z : t \longmapsto \dfrac{3 + e^{-t}}{2}$
5. $q : t \longmapsto q_0 e^{-t/RC}$
6. $v : t \longmapsto \dfrac{mg}{k} + v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$