

Feuille de cours 17 bis : dérivée et sens de variation

On utilise depuis le début de cette année le lien entre dérivée d'une fonction et sens de variation. Notons que la preuve de ce lien repose sur le théorème des accroissements finis.

Proposition 1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors on a les équivalences suivantes :

1. f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$;
2. f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$;
3. f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration :

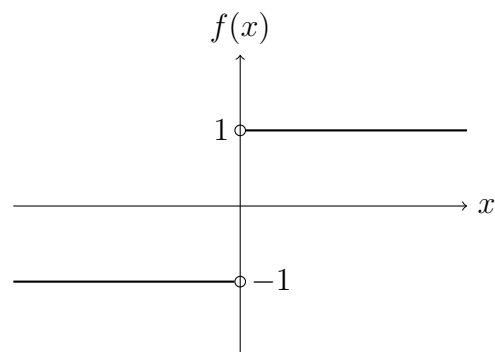
1. Supposons f croissante, et soit $x_0 \in I$. Pour $x \geq x_0$, on a $f(x) \geq f(x_0)$, et pour $x \leq x_0$ on a $f(x) \leq f(x_0)$. Ainsi $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont de même signe, donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$. En passant à la limite $x \rightarrow x_0$, on trouve $f'(x_0) \geq 0$. Réciproquement, supposons $f' \geq 0$ sur I , et soient $x, y \in I$ avec $x \geq y$. Comme f est dérivable sur I , d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]y, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \geq 0$ donc $f(x) - f(y) \geq 0$ i.e. $f(x) \geq f(y)$. Ainsi f est croissante.
2. On applique le point 1 à $-f$. En effet, f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante, et $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $(-f)'(x) \geq 0$, d'où le résultat.
3. f est constante sur un intervalle I si et seulement si f est à la fois croissante et décroissante sur I . Le résultat s'obtient donc en combinant les points 1 et 2.

Remarque :

Attention, dans la proposition ci-dessus, l'hypothèse " I est un intervalle" est CAPITALE!!

Par exemple, la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée ($f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$) strictement négative sur \mathbb{R}^* , mais il est faux de dire que $\frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}^* car $-\frac{1}{1} \leq 1$ et pourtant $f(-1) = -1 \leq f(1) = 1$. (De manière générale, il n'est pas recommandé de parler de sens de variation sur un ensemble qui n'est pas un intervalle.)

De même une fonction dérivable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D, f'(x) = 0$ n'est pas forcément constante sur D : elle n'est constante que sur les *intervalles* inclus dans D . Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\forall x > 0, f(x) = 1$ et $\forall x < 0, f(x) = -1$, est telle que f' est la fonction nulle sur \mathbb{R}^* , mais f n'est pas constante sur \mathbb{R}^* ; f est constante sur les intervalles formant \mathbb{R}^* i.e. sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.



Le fait que, sur un intervalle, les fonctions de dérivée nulle sont les fonctions constantes est aussi ce qui justifie la notion de *constante d'intégration* pour le calcul de primitives.

Proposition 2

Soit I un intervalle et soit f une fonction continue sur I . Alors deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Autrement dit, si F est une primitive de f sur I fixée, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $F' = G' = f$ donc $G - F$ vérifie $(G - F)' = G' - F' = 0$. Comme on travaille sur un *intervalle* I cela implique que $G - F$ est constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, G(x) - F(x) = c$ i.e. $G(x) = F(x) + c$.

Réciproquement, si F est une primitive de f alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ la fonction $F + c$ vérifie aussi $(F + c)' = F' = f$.

Remarque : Attention, signalons pour finir que la proposition 1 au début de ce document ne fournit pas d'équivalence concernant la stricte monotonie, au sens où il est FAUX que " f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ ".

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , mais sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0.

Seule l'implication "si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I " est vraie. En fait, on a même la proposition suivante que nous admettons :

Proposition 3

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . S'il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in I$ tels que :

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f'(x_k) = 0$, et
- $\forall x \in I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, f'(x) > 0$

(autrement dit si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I .