Programme de colles : semaine 24, du 13/4 au 17/4

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Continuité

- continuité en un point du domaine, continuité à gauche / à droite, sur un ensemble *(la définition de la continuité avec des quantificateurs doit être comprise mais ne sera pas au cœur des exercices demandés)*
- prolongement par continuité en un point
- caractérisation séquentielle de la continuité.
  Application : soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.
- Savoir faire une phrase pour justifier qu'une fonction est continue en tant que somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues
- théorème des valeurs intermédiaires, preuve par dichotomie
  Reformulation : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  Application 1 : si f est une fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle I alors f est de signe constant sur I
  Application 2 : si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) = 0$. Un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.
- extrema sur un segment : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
- théorème de la bijection : soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f : I \longrightarrow J$ est bijective et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et de même monotonie que f
- étude de suites implicites du type $u_n = f^{-1}(n)$ ou $u_n = f_n^{-1}(0)$

2 Dérivabilité

- définition et interprétation graphique comme coefficient directeur de la tangente. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- dérivée à droite/à gauche. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
- dérivable implique continue
- justification de la dérivabilité d'une fonction en tant que produit, somme, quotient, composée
- dérivée de la bijection réciproque : si f est bijective et si $f(x_0) = y_0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 ssi $f'(x_0) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
- notion de dérivée n-ème. Exemple du calcul des dérivées n-ème de fonctions puissances
- notion de classe de régularité : f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsqu'elle y est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ y est continue. Régularité $\mathcal{C}^\infty$
- exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$: $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$

- exemples d'étude de régularité en un point de "recollement"
- notion d'extremum local
- si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrêmité de I, et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- théorème de Rolle
- théorème des accroissements finis : *on demande de toujours revenir à l'égalité des accroissements finis* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ *; l'inégalité des accroissements finis et la majoration* $|f(b) - f(a)| \leq K|b-a|$ *si* $|f'| \leq K$ *ont été traités en cours mais doivent être redémontrés*
- utilisation du théorème des accroissements finis : obtention d'inégalités ; étude de la convergence de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ vers un point fixe contractant
- lien entre dérivée et sens de variation

3 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions de "f est continue en x_0" et de "f est dérivable en x_0". Quelle notion implique l'autre ? Le démontrer.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et l'expliquer sur un dessin.
3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
4. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".
6. Énoncer le théorème donnant la dérivée de la bijection réciproque d'une fonction.
7. Énoncer le théorème de Rolle et l'illustrer sur un dessin.
8. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer sur un dessin.
9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Rappeler la définition d'une primitive de f sur I puis démontrer que deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 12 (à nouveau des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement, on pourra adopter des notations "à la physicienne"), tous les exos :
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7148&v=595db`

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.