

**Exercice 1 (intégration directe)**

Calculer les intégrales suivantes :

1. (a) $\int_1^2 x^2 - 1 dx$ (b) $\int_1^2 \frac{1}{x+3} dx$ (c) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(t) dt$ (d) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	2. (a) $\int_0^2 (x+1)^7 dx$ (b) $\int_0^2 (2x+1)^7 dx$ (c) $\int_0^1 e^{2x} + e^{1-x} dx$ (d) $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x) dx$	3. (a) $\int_0^1 x^5 \cos(x^6) dx$ (b) $\int_1^2 xe^{1-x^2} dx$ (c) $\int_1^e \frac{(\ln(x))^5}{x} dx$ (d) $\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^4} dt$
--	---	--

**Exercice 2 (intégration par parties)**

1. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties :

(a) $\int_0^{\pi/4} t \cos(2t) dt$	(b) $\int_0^1 t^2 e^{-t} dt$	(c) $\int_1^2 \sqrt{t} \ln(t) dt$
------------------------------------	------------------------------	-----------------------------------

2. Calculer pour tout  $x > 0$  les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^x e^t \sin(t) dt$	(b) $\int_1^x \sin(\ln(t)) dt$	(c) $\int_0^x e^{-t} \ln(e^{2t} + 1) dt$
-------------------------------	--------------------------------	--

3. Déterminer les primitives de :

(a) $\arctan$ sur $\mathbb{R}$	(b) $x \mapsto x^2 \ln x$ sur $\mathbb{R}_*^+$	(c) $x \mapsto \ln(x)^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$
--------------------------------	--	---

**Exercice 3 (changement de variables)**

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. (a) $\int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi)} e^t \cos(e^t) dt$ via $u = e^t$ (b) $\int_1^4 \frac{(\sqrt{t}-1)^4}{\sqrt{t}} dt$ via $u = \sqrt{t}$ (c) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin(t)} dt$ via $u = \sin(t)$	2. (a) $\int_1^2 \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x^2} dx$ via $t = \frac{1}{x}$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2+e^{-t}} dt$ avec $u = e^t$ (c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ via $u = \sqrt{1+x}$
--	--

3. (a)  $\int_e^x \frac{\ln(\ln(t))}{t} dt$  via  $u = \ln(t)$

(b)  $\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} dt$  via un changement de variables à déterminer

(c)  $\int_1^x e^{\sqrt{t}} dt$  via  $u = \sqrt{t}$

**Exercice 4 (décomposition en éléments simples)**

1. On souhaite calculer l'intégrale  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$ . Comme, a priori, on ne connaît pas de primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ , on propose d'écrire cette quantité sous une autre forme. On va en fait déterminer deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

- (a) Montrer que pour  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$  on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \iff (a+b)x + a = 1.$$

- (b) En identifiant les coefficients de ces deux polynômes déterminer les valeurs des constantes  $a$  et  $b$ .

- (c) Conclure en calculant l'intégrale  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$ .

2. (a) Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}, \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}.$$

- (b) En déduire  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$ .

3. (a) Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x + 1}.$$

- (b) En déduire  $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$ .

**Exercice 5**

Soient  $S = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$  et  $C = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$ .

- Effectuer les changements de variables  $u = \cos(t)$  sur  $S$ , et  $u = \sin(t)$  sur  $C$ .
- Calculer  $C + S$ .
- En déduire les valeurs de  $C$  et de  $S$ .

**Exercice 6**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$  et  $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$ .

1. Déterminer le sens de variation des suites  $(I_n)_{n \geq 1}$  et  $(J_n)_{n \geq 1}$ .
2. Montrer que  $\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$ .
4. En déduire la limite de  $(J_n)$  et donner un équivalent de  $J_n$ .

**Exercice 7**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$ .

1. Etudier la monotonie de la suite  $(I_n)$  et en déduire qu'elle converge vers un réel  $\ell$ .
2. Calculer  $I_n + I_{n+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et en déduire la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 8**

On considère la fonction  $\phi$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $\phi(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

1. Déterminer le sens de variation de  $\phi$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. Etudier le signe de  $g(x) = \phi(x) - \ln x$  pour tout réel  $x > 0$ .  
On pourra écrire  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ .
3. En déduire la limite de  $\phi$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 9**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $T$ -périodique.

Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ .

On commencera par faire un dessin pour représenter la situation.

**Exercice 10**

1. Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et croissante. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f \leq \sum_{k=1}^n f(k). \text{ On commencera par faire un dessin.}$$

2. On suppose que  $f$  est décroissante. Quelle inégalité similaire peut-on obtenir ?
3. Démontrer que la série harmonique  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$  diverge.