Programme de colles : semaine 25, du 4/5 au 8/5

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Dérivabilité

- définition et interprétation graphique comme coefficient directeur de la tangente. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- dérivée à droite/à gauche. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
- dérivable implique continue
- justification de la dérivabilité d'une fonction en tant que produit, somme, quotient, composée
- dérivée de la bijection réciproque : si f est bijective et si $f(x_0) = y_0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 ssi $f'(x_0) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
- notion de dérivée n-ème. Exemple du calcul des dérivées n-ème de fonctions puissances
- notion de classe de régularité : f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsqu'elle y est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ y est continue. Régularité $\mathcal{C}^\infty$
- exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$: $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$
- exemples d'étude de régularité en un point de "recollement"
- notion d'extremum local
- si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I, et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- théorème de Rolle
- théorème des accroissements finis : *on demande de toujours revenir à l'<u>égalité</u> des accroissements finis* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ *; l'inégalité des accroissements finis et la majoration* $|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$ *si* $|f'| \leq K$ *ont été traités en cours mais doivent être redémontrés*
- utilisation du théorème des accroissements finis : obtention d'inégalités ; étude de la convergence de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ vers un point fixe contractant
- lien entre dérivée et sens de variation

2 Intégration

- Calculs de primitives et d'intégrales par intégration directe. On rappelle que des calculs d'intégrale utilisant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ ont été faits en remédiation précédemment
- exemples de décompositions en éléments simples pour calculer des intégrales de fractions rationnelles. *Aucun théorème général sur la décomposition en éléments simples n'est au programme de BCPST.*
- définition de l'intégrale comme aire sous la courbe
- Théorème fondamental de l'analyse : la fonction $F_a : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a
- règles de calculs pour les intégrales : linéarité, Chasles
- positivité et croissance de l'intégrale, application à des études de suites définies par une intégrale (sens de variation, limite par encadrement)
- inégalité triangulaire
- si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$

- dérivation d'expressions du type $\phi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ où f est continue sur $[a, b]$ et u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $[a, b]$. *La formule ne doit pas être apprise par cœur mais redémontrée dans les exercices.*
- intégration par parties
- changement de variables. *Les élèves sont encouragés à présenter les changements de variables "à la physicienne".*
- si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et paire (resp. impaire) alors $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$ (resp. $\int_{-a}^{a} f = 0$).
- sommes de Riemann d'une fonction continue. On note $R_{n,g}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ et $R_{n,d}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$. Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ alors $\lim_{n\to+\infty} R_{n,g}(f) = \lim_{n\to+\infty} R_{n,g}(f) = \int_a^b f$.

3 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions de "f est continue en x_0" et de "f est dérivable en x_0". Quelle notion implique l'autre ? Le démontrer.
2. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".
4. Énoncer le théorème de Rolle et l'illustrer sur un dessin.
5. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer sur un dessin.
6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Rappeler la définition d'une primitive de f sur I puis démontrer que deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.
7. Énoncer le théorème d'intégrations par parties.
8. Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ grâce à une intégrations par parties.
9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire (resp. impaire) et soit $a > 0$, démontrer que $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ (resp. $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$).
10. Donner la définition des sommes de Riemann d'une fonction f définie sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de ces sommes ?

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 12 (à nouveau des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement, on pourra adopter des notations "à la physicienne"), tous les exos : `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7148&v=595db`

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.