Feuille de cours 18 : géométrie

Dans ce chapitre, on rappelle les outils des classes antérieures permettant de décrire les objets géométriques simples du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$ que sont les vecteurs, les droites et les plans. On ne présente pas une approche formelle de la géométrie, mais on s'attache à :

- décrire algébriquement (i.e. avec des équations) ces objets,
- résoudre des problèmes simples de géométrie à l'aide de ces descriptions algébriques,
- manipuler des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ en lien avec les notions vues dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

1 Vecteurs du plan et de l'espace

1.0 Préambule : point, vecteur, coordonnées... choix des notations

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$. Cela signifie que les points $M \in \mathcal{P}$ (resp. $M \in \mathcal{E}$) du plan $\mathcal{P}$ (resp. de l'espace $\mathcal{E}$) sont des *couples (resp. des triplets) de réels* : $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$). Notez le signe “=” : un point *est* un couple ou un triplet.

Mais on pourra également noter $M(x, y)$ (ou $M(x, y, z)$) sans signe séparant le point et le couple (ou triplet) de réels. Sous cette notation se cache l'idée que le point $M \in \mathcal{P}$ (ou $M \in \mathcal{E}$) est *repéré* par le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ou le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$). On dit alors que (x, y) ou (x, y, z) sont les *coordonnées* de M.

Ces coordonnées codent le chemin à suivre pour arriver au point M :

- depuis un point de départ, appelé *origine* du plan ou de l'espace. Ce sera le point $O = (0, 0)$ (ou $O = (0, 0, 0)$) ;
- en suivant des directions privilégiées, au nombre de 2 dans le plan et 3 dans l'espace. Ces directions sont des *vecteurs de base* correspondant à des déplacements “élémentaires”. Dans le plan, ce sera : $\vec{\imath} = (1, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1)$; et dans l'espace : $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Dans ce contexte, on s'intéresse donc au *vecteur* $\overrightarrow{OM}$ qui s'obtient alors, si $M(x, y)$ (resp. $M(x, y, z)$) en faisant un déplacement de x selon $\vec{\imath}$, puis de y selon $\vec{\jmath}$ (et de z selon $\vec{k}$), i.e. $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ (resp. $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$).

Pour distinguer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ du point M, on pourra alors noter $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$). Ou bien encore simplement $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (resp. $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$). Il est important de comprendre que cette notation "cache" l'usage des vecteurs de base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ (et $\vec{k}$). On dit qu'on exprime le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans *la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (ou $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$) ou dans le *repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (ou $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$). La notion de base du plan ou de l'espace est présentée en détail dans la suite de ce cours.

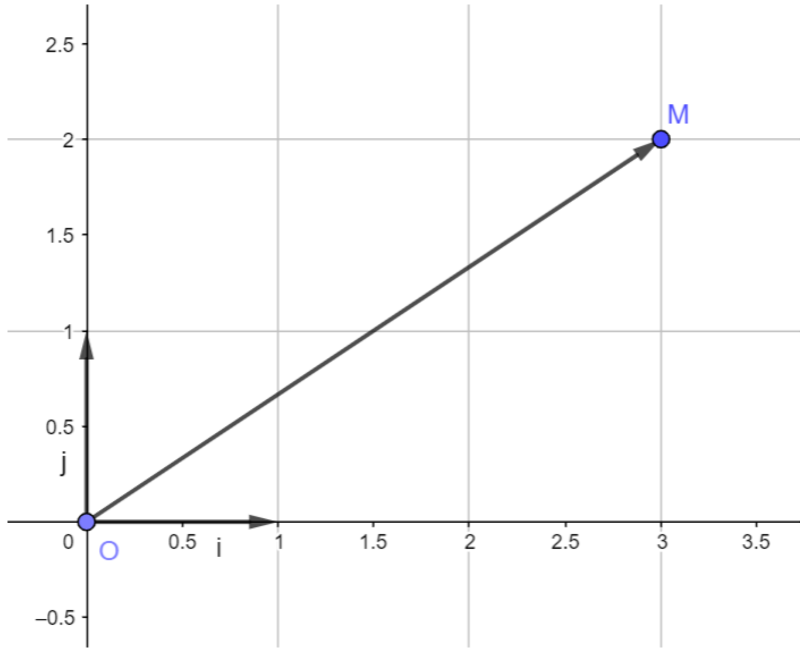


FIGURE 1 – Le vecteur $\vec{OM} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

Malgré cette disctinction, on identifie souvent point et vecteur. On pourra donc aussi noter par exemple $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ pour alléger l'écriture. D'autres notations existent comme par exemple $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$. Il est aussi autorisé d'utiliser des points-virgules entre les coordonnées.

Finalement, quelle notation adopter ? Il n'y a pas de consigne universelle. En fait, on est constamment amené à identifier point, vecteur et coordonnées dans la base utilisée. Ainsi, seul le contexte permet de distinguer ces situations. En pratique, le jour du concours, il faut de toute façon utiliser la notation choisie par l'énoncé !

1.1 Opérations sur les vecteurs

On se concentre sur la manipulation des vecteurs. Comme on l'a esquissé dans le paragraphe précédent, cela signifie qu'on s'intéresse à un déplacement (précisément, une translation) dans le plan ou dans l'espace. Concrètement, le point de départ et le point d'arrivée ne comptent pas en tant que tels, mais seulement à travers leurs positions relatives. On dit qu'un même vecteur a plusieurs *représentants*.

Définition 1
Soient $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \in \mathcal{P}$ deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Soient $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B) \in \mathcal{E}$ deux points de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Remarque 2
Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ a toutes ses coordonnées nulles. C'est le *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$: pour tout point A, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Proposition 3
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan (resp. de l'espace) il existe un unique point M du plan (resp. de l'espace) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ où $O = (0, 0)$ (resp. $O = (0, 0, 0)$) est l'origine du plan (resp. de l'espace).

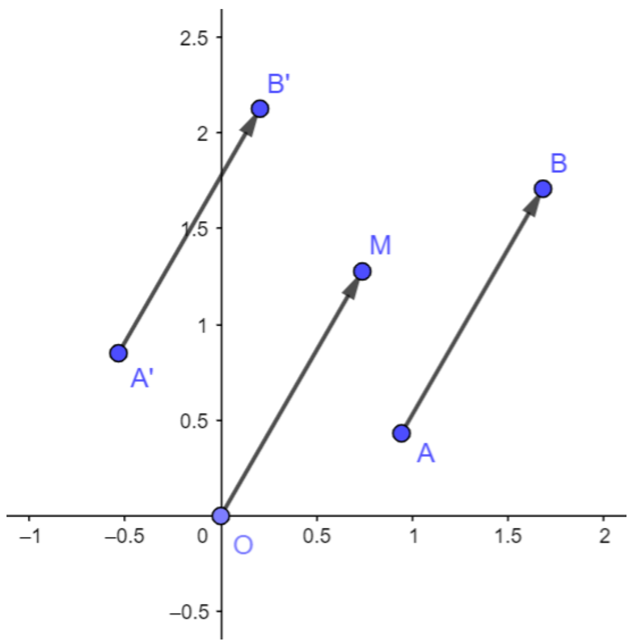


Figure 2 – Trois représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$

On définit les opérations suivantes sur les vecteurs.

Définition 4
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$,
- $\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Définition 5
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$,
- $\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Proposition 6 (Relation de Chasles)
Soient A, B, C trois points du plan (ou de l'espace) alors $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.}$

Démonstration : dans le plan, notant (x_A, y_A) les coordonnées de A (et idem pour B et C) :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} =$$

Remarque 7
Pour tous points A, B on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, car $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Définition 8
Soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ n vecteurs du plan (ou de l'espace). On appelle <u>combinaison linéaire</u> de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ tout vecteur $\vec{v}$ du type

$$\boxed{\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n} \quad \text{où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Interprétation géométrique : un vecteur $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ lorsqu'on peut obtenir le déplacement $\vec{v}$ en combinant les déplacements $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

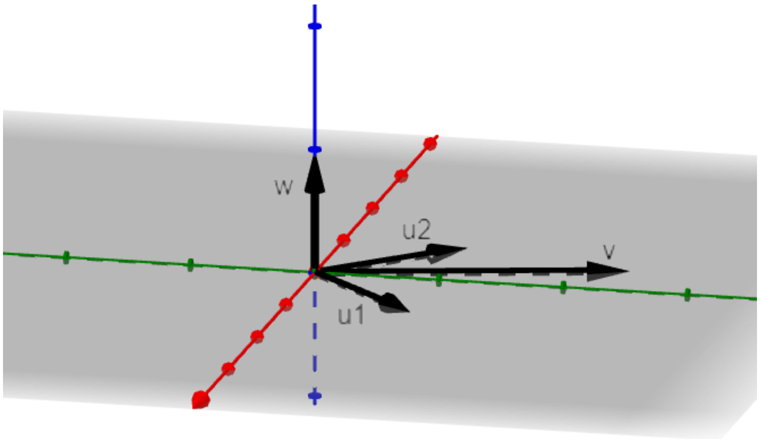


FIGURE 3 – Le vecteur $\vec{v} = (-0.5, 2.5, 0) = \vec{u}_1 + 1.5\vec{u}_2$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$. Mais le vecteur $\vec{w} = (0, 0, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Suivez ce lien : `https://www.geogebra.org/3d/v5mqt8s3` et confirmez ce résultat en modifiant les valeurs des paramètres λ_1, λ_2 (à la main, ou en cliquant sur le bouton "play").

1.2 Bases du plan $\mathbb{R}^2$

Définition 9
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont dits colinéaires lorsque l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire lorsque : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Remarque 10
1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est
2. Géométriquement, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'ils sont supportés par la même droite.

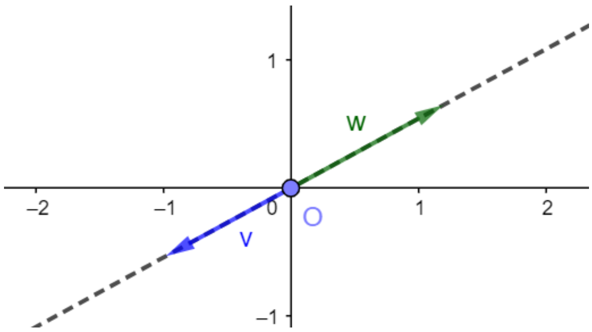


FIGURE 4 – Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

3. **Attention,** le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur du plan. Cela implique qu'il est **faux** de dire que : "$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$".
4. La caractérisation précédente devient correcte si l'on inclut en plus la possibilité que $\vec{u}$ soit nul. On a :

$$\Big(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\Big) \iff \Big(\vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{v} = \lambda \vec{u}\Big)$$

5. Ainsi : $\Big(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires}\Big) \iff$

Exercice 1
1. Les vecteurs $\vec{u} = (2, 4)$ et $\vec{v} = (-4, -8)$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 1)$ sont-ils colinéaires ?

Définition 11

1. Une base du plan est un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
2. Un repère du plan est un triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où O est un point du plan, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en est une base.

Remarque 12
Ainsi, par définition une base du plan est une famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ qui est
Mais on retrouve bien la notion de "base d'un espace vectoriel" car

Proposition 13
Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan.

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan il existe un unique couple de réels $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$.
2. Pour tout point M du plan il existe un unique couple de réels $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$.

Remarque 14
Le couple (λ_1, λ_2) est appelé coordonnées de $\vec{u}$ (ou de M) dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (ou dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$). **Ces coordonnées dépendent du choix de la base !**

Lorsqu'on donne un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $\vec{u} = (x, y)$, on donne en fait les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base **canonique** (e_1, e_2) c'est-à-dire pour $e_1 =$ et $e_2 =$
Attention, si on change de base alors les coordonnées changent. Par exemple, le vecteur $\vec{u} = (2, -3)$ a pour coordonnées $(2, -3)$ dans la base canonique, mais dans la base (e'_1, e'_2) donnée par $e'_1 = (0, -1)$ et $e'_2 = (2, 0)$ ses coordonnées sont

Dans la suite, lorsque la base n'est pas précisée, c'est qu'il s'agit de la base canonique.

Définition 15
Soient $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ la quantité :

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Proposition 16
Un couple $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de vecteurs du plan forme une base si et seulement si $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq 0$.

Démonstration :

Remarque 17
Une autre reformulation de la proposition précédente est la suivante : pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Exercice 2
À quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{u} = (1, m)$ et $\vec{v} = (m, 2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3
Soient $u_1 = (-1, 2)$ et $u_2 = (4, 1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2) est une base du plan.
2. Quel est le vecteur dont les coordonnées dans cette base sont 2 et -1 ?
3. Déterminer les coordonnées de $e_1 = (1, 0)$ et de $e_2 = (0, 1)$ dans cette base.
4. En déduire les coordonnées de $w = (-1, 11)$ dans cette base.

1.3 Bases de l'espace $\mathbb{R}^3$

La notion de *base* dans le plan se généralise dans l'espace de la manière suivante :

Définition 18
On dit que 3 vecteurs de l'espace $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont coplanaires lorsque l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres.

Remarque 19

1. $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est
2. Géométriquement, $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsqu'ils appartiennent à un même plan de l'espace

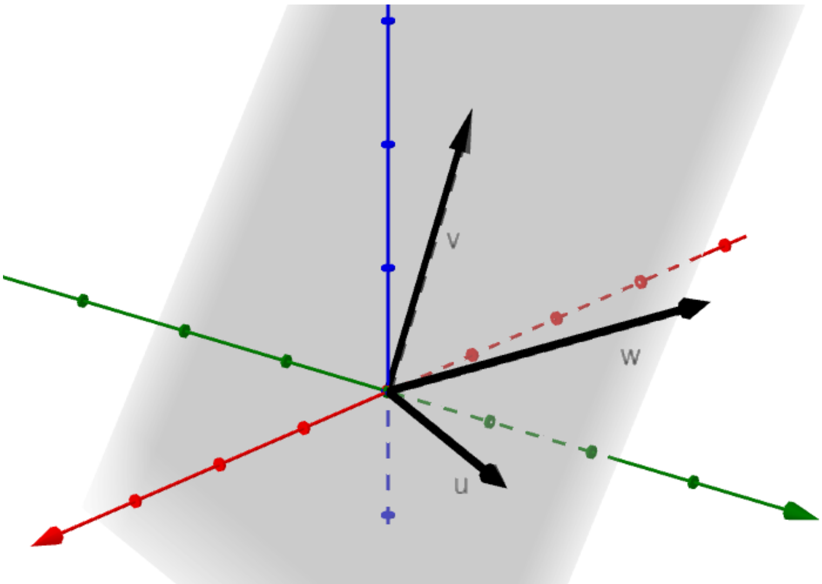


FIGURE 5 – Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Dans l'illustration précédente `https://www.geogebra.org/3d/v5mqt8s3`, on pouvait remarquer que si $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ alors $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Définition 20

1. Une base de l'espace est un triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs non coplanaires.
2. On appelle repère de l'espace tout quadruplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où O est un point de l'espace et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 21
Ainsi, par définition une base du plan est une famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui est
Mais on retrouve bien la notion de "base d'un espace vectoriel" car

Remarque 22
Par exemple, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ et $\vec{k} = (0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (cette base est appelée base). En effet, pour tout $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que

$$\lambda_1\vec{\imath} + \lambda_2\vec{\jmath} + \lambda_3\vec{k} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{c'est } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \qquad .$$

Exercice 4
Soient $\vec{e}_1 = (1,1,2), \vec{e}_2 = (-1,2,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,3,1)$ Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées du point $M = (1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 5
À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,1,1)$, $\vec{e}_2 = (0,a,1)$ et $\vec{e}_3 = (1,2a,1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

2 Produit scalaire et orthogonalité

Certains résultats de cette section s'énonçant de manière identique dans le plan et dans l'espace, on note $\mathcal{PE}$ pour désigner le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

2.1 Calculs algébriques

Définition 23

1. Soient $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel donné par :
$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy'.$$
2. Soient $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel donné par :
$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Remarque 24

1. **Attention,** le produit scalaire est un nombre réel, pas un vecteur ! $\boxed{\vec{u} \,.\, \vec{v} \in \mathbb{R}.}$
2. On note aussi $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$.
3. Matriciellement, si on note $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \,.\, \vec{v} = U^T V$. En effet :

Attention : pour pouvoir utiliser la formule donnant le produit scalaire $\vec{u} \,.\, \vec{v}$, il faut que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient donnés dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$). En effet, si on ne dispose que des coordonnées dans une base quelconque, la formule ne s'applique plus. Par exemple, plaçons-nous dans la base du plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = (1, 2)$ et $\vec{e}_2 = (1, 3)$. Déjà il s'agit bien d'une base du plan car :

Les vecteurs $\vec{u} = (2, 5)$ et $\vec{v} = (2, 4)$ ont pour coordonnées respectives $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ car

Or $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 2 \times 2 + 5 \times 4 = 24 \neq 1 \times 2 + 1 \times 0$. En fait pour que la formule de la définition 26 soit valable, il faut se placer dans une base qu'on dira *orthonormée* (cf infra).

Proposition 25

Le produit scalaire de $\mathcal{PE}$ est :

1. bilinéaire : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{PE},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u} \,.\, (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, \vec{w}$
2. symétrique : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{PE},\ \vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$
3. positif : $\forall u \in \mathcal{PE},\ \vec{u} \,.\, \vec{u} \geq 0$
4. défini : $\forall \vec{u} \in \mathcal{PE},\ \vec{u} \,.\, \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Démonstration : On le fait dans $\mathbb{R}^2$ (la démonstration est identique dans $\mathbb{R}^3$) en notant $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ et $\vec{w} = (x'', y'')$.

1. On a $\lambda\vec{v} + \vec{w} = (\lambda x' + x'', \lambda y' + y'')$ donc :

$$\vec{u}\,.\,(\lambda\vec{v}+\vec{w}) = x(\lambda x'+x'')+y(\lambda y'+y'') = \lambda xx'+xx''+\lambda yy'+yy'' = \lambda(xx'+yy')+xx''+yy'' = \lambda\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{u}\,.\,\vec{w}$$

2. On a $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
3. On a : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = x^2 + y^2 \geq 0$.
4. Si $\vec{u}\,.\,\vec{u} = 0$ alors $x^2 + y^2 = 0$. Or $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, on a donc nécessairement $x^2 = y^2 = 0$ donc $x = y = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$. Le sens réciproque est clair : $\vec{0}\,.\,\vec{0} = 0$.

Comme $\vec{u}\,.\,\vec{u} \geq 0$ la définition suivante est correcte :

Définition 26
Pour $\vec{u} \in \mathcal{PE}$, on définit la norme de $\vec{u}$ par : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}}$.

Remarque 27
Lorsque $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On retrouve donc *la norme* du nombre complexe $x + iy$. Dans le cas où $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Exemple : si $\vec{u} = (1, -2, 2)$ alors $||\vec{u}|| =$

Proposition 28
La norme sur $\mathcal{PE}$ vérifie : $\forall \vec{u} \in \mathcal{PE}$,

1. $||\vec{u}|| \geq 0$
2. $||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda\vec{u}|| = |\lambda|\,||\vec{u}||$.

Proposition 29
Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{PE}$. On a :

1. $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
2. $|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (inégalité triangulaire).

Démonstrations :

2.2 Interprétation géométrique, orthogonalité

Géométriquement, pour A, B deux points du plan ou de l'espace, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance entre A et B : $\boxed{d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||.}$ On peut aussi noter cette distance AB (sans flèche). On a donc les formules suivantes :

- dans le plan : $d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$,
- dans l'espace : $d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

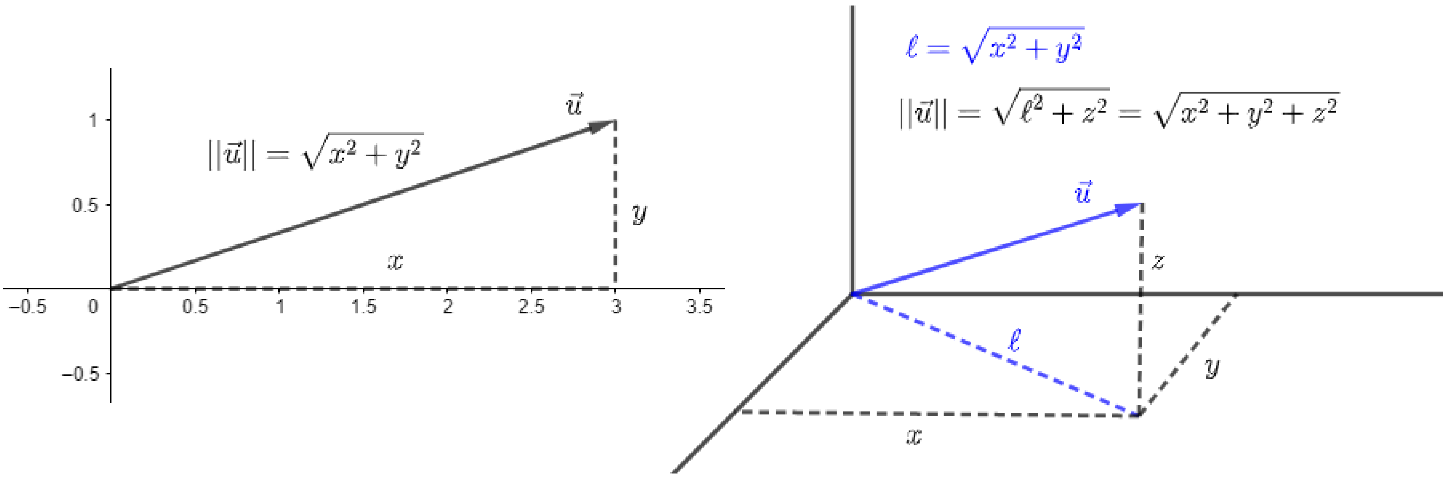


FIGURE 6 – distance en tant que norme d'un vecteur

Exercice 6
On considère les points du plan $A(0,2)$ et $B(-1,1)$. *On illustrera toutes les questions ci-dessous par un schéma.*

1. Calculer la distance AB.
2. Quels sont les points $M(x,y)$ du plan tels que $BM = BA$? De quel objet géométrique vient-on d'obtenir l'équation ?
3. Déterminer l'équation du cercle de centre A et de rayon 2.
4. Déterminer les points d'intersection des deux cercles précédents.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ peut être relié à *l'angle* entre ces vecteurs.

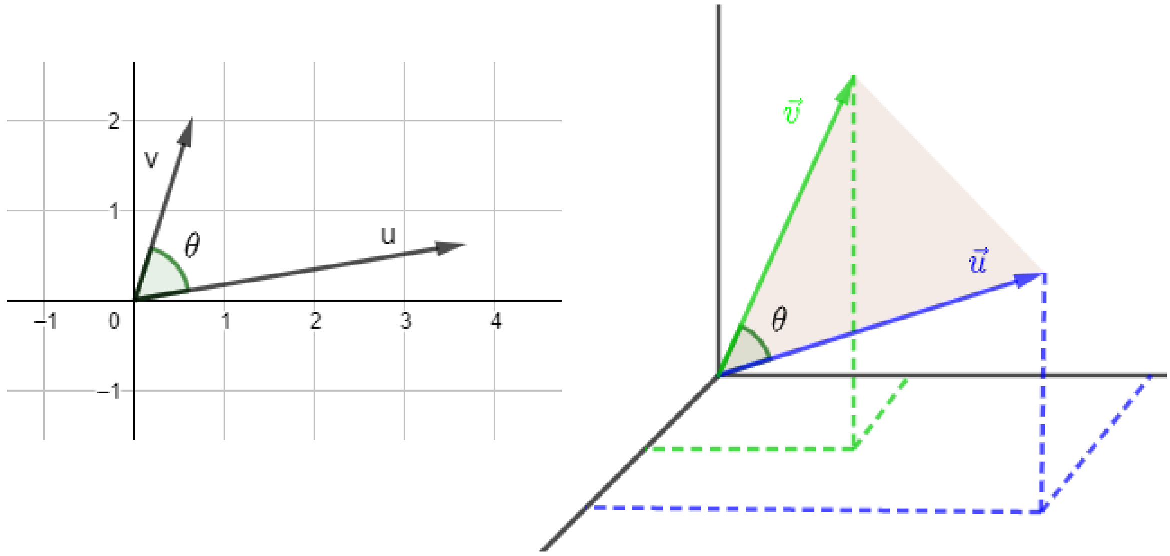


FIGURE 7 – angle formé par deux vecteurs

Proposition 30
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan ou de l'espace, et soit $\theta \in \mathbb{R}$ l'angle formé par ces vecteurs. Alors
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,\cos(\theta).$$

Remarque 31
1. Dans ce cours, on ne donne pas de définition de "l'angle" entre deux vecteurs. Précisons tout de même que dans l'espace, l'angle entre deux vecteurs est mesuré dans le plan formé par ces vecteurs.
2. Notez qu'en mathématiques, on préférera la plupart du temps exprimer les angles en radians plutôt qu'en degrés.

Considérons $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan ou de l'espace. À quelle condition a-t-on $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$? Notons θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $||\vec{u}|| \neq 0$ et $||\vec{v}|| \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}
\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\theta) = 0 &\iff \cos(\theta) = 0 \\
&\iff \theta \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \\
&\iff \theta \text{ est un angle droit.}
\end{aligned}$$

Cela justifie le vocabulaire suivant :

Définition 32
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>orthogonaux</u>, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ lorsque $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.

Remarque 33
On emploie aussi le terme “normal” comme synonyme d’orthogonal.

Exercice 7
1. Déterminer l’ensemble des vecteurs de l’espace orthogonaux à $\vec{u} = (1, 2, 3)$.
2. Soient $A = (2, 0)$ et $\vec{n} = (1, 1)$. Déterminer l’ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \perp \vec{n}$. Représenter la situation sur un dessin.

Proposition 34 (théorème de Pythagore)
Pour $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs du plan ou de l’espace, on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2.$$

Démonstration :

L’orthogonalité est un moyen rapide d’identifier des bases. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 35
1. Si deux vecteurs non nuls du plan sont orthogonaux, alors ils forment une base.
2. Si trois vecteurs non nuls de l’espace sont orthogonaux deux à deux, alors ils forment une base.

Démonstration : admis

Définition 36
On dit qu'un vecteur du plan ou de l'espace est unitaire lorsqu'il est de norme égale à 1.

Définition 37

1. On appelle base orthonormée du plan toute base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle que :
   - $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ et
   - $||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = 1$.
2. On appelle base orthonormée de l'espace toute base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que :
   - $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ et
   - $||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1$.

Exercice 9 bis
Montrer que $\vec{e}_1 = \dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $\vec{e}_2 = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ et $\vec{e}_3 = \dfrac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}$ forment une base orthonormée de l'espace.

Remarque 38
Lorsque les coordonnées des vecteurs sont données dans une base orthonormée, on peut utiliser les formules pour calculer le déterminant et le produit scalaire, c'est-à-dire :

3 Droites du plan

Dans toute cette partie on travaille dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 39
Soient $A \in \mathcal{P}$ un point du plan, et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. La droite passant par A et orientée par $\vec{u}$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}.\}$$

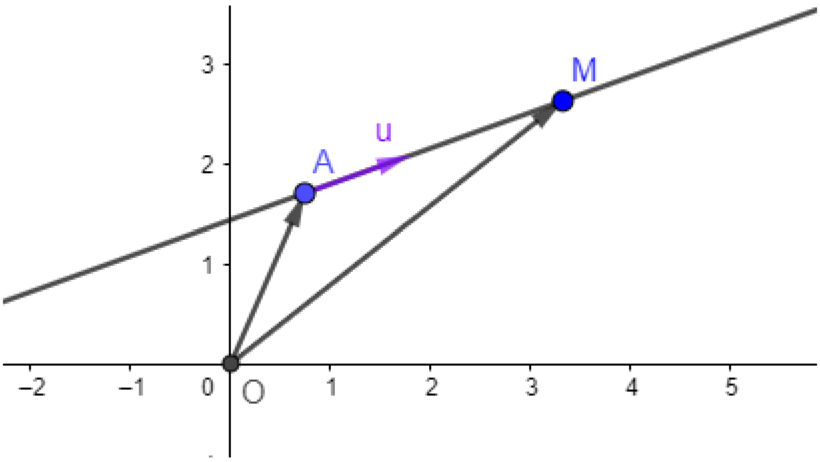


FIGURE 8 – droite passant par A et orientée par $\vec{u}$

Remarque 40
On dit que $\vec{u}$ est *un* vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. Il n'y a pas unicité de ce vecteur. Si $B, C \in \mathcal{D}$ sont 2 points distincts, alors le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est vecteur directeur de $\mathcal{D}$; on note d'ailleurs aussi $\mathcal{D} = (BC)$.

Équation paramétrique :
L'écriture choisie pour définition permet d'obtenir rapidement la forme des éléments d'une droite : on les exprime en fonction du *paramètre* $t \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et orientée par $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ alors :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}$$

On dit que $\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}$ est une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

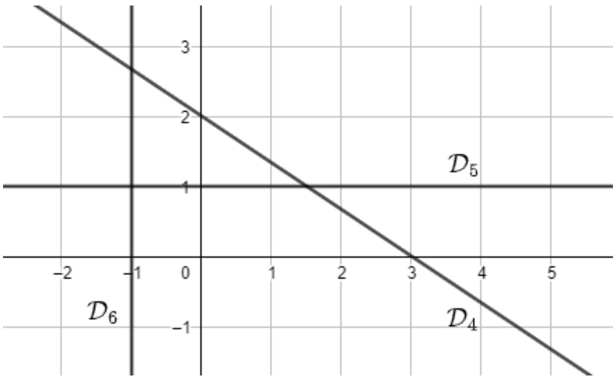
Remarque 41
1. On s'autorise aussi à additionner points et vecteurs du plan pour écrire que

$$\mathcal{D} = \{A + t\vec{u}, \ t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Il faut, sans hésitation, savoir traduire l'appartenance d'un point M à une droite $\mathcal{D}$ dont on connaît une équation paramétrique. Si $\mathcal{D} = \{A + t\vec{u}, \ t \in \mathbb{R}\}$, alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\boxed{\text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que}}$ $M = A + t\vec{u}$.

Exercice 8

1. Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $A = (1, 2)$ et orientée par $\vec{u} = (-1, 1)$. En faire un dessin.
2. Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par $B = (-1, 3)$ et $C = (2, 2)$.
3. Dessiner la droite $\mathcal{D}_3$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3 - t \end{cases}$.
4. Donner une équation paramétrique des droites $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$ dessinées ci-dessous.



Équation cartésienne :
Une autre façon de définir une droite consiste à s'appuyer non plus sur un vecteur directeur de la droite, mais sur un vecteur *normal*.

Définition 42
Soient $A \in \mathcal{P}$ un point du plan, et $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. La droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} \, . \, \vec{n} = 0\}$$

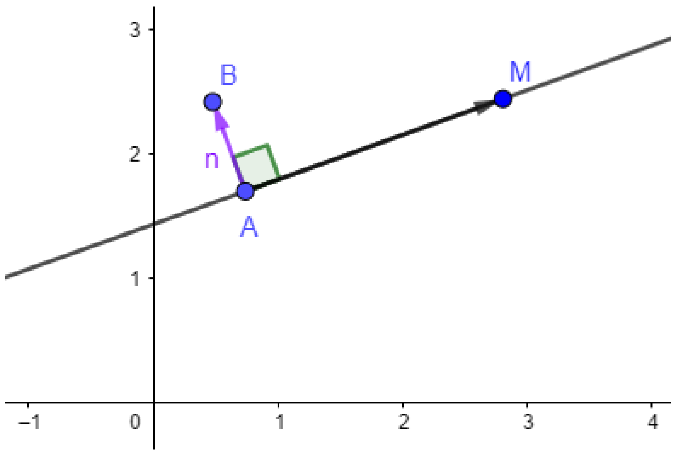


FIGURE 9 – droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

L'écriture avec un vecteur normal permet d'obtenir une équation sur les coordonnées d'un point M garantissant son appartenance à la droite $\mathcal{D}$. En effet, si $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(x_{\vec{n}}, y_{\vec{n}})$ alors :

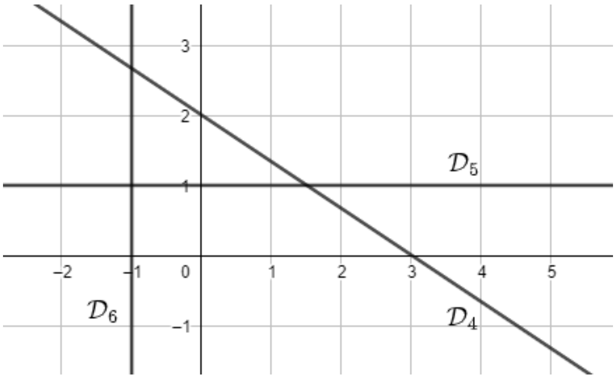
$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \, . \, \vec{n} = 0$$

Cette équation est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$

Remarque 43
1. Une équation cartésienne d'une droite est donc une relation de la forme $\boxed{ax + by = c}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifient $(a, b) \neq (0, 0)$ (car $\vec{n} \neq \vec{0}$).
2. Lorsque $b \neq 0$ (c'est-à-dire lorsque la droite n'est pas verticale), on peut aussi l'écrire $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Le coefficient $-\frac{a}{b}$ est appelé *pente* de la droite, et le coefficient $\frac{c}{b}$ *ordonnée à l'origine*. Il faut sans hésitation savoir traduire ces nombres géométriquement :

Exercice 9

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $A = (1, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (1, 1)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par $B = (1, 1)$ et de pente -2.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par $C = (1, 2)$ et par $D = (3, -2)$.
4. Déterminer une équation cartésienne des droites $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5$ et $\mathcal{D}_6$ dessinées ci-dessous.



Comment passer d'une représentation à l'autre ?

Il faut être en mesure de passer de la représentation paramétrique à la représentation cartésienne et inversement.

Pour passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, il faut "résoudre l'équation". Soit par exemple $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x + 3y = 4$, alors :

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff 2x + 3y = 4 \iff$$

Réciproquement, pour passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne, il faut "trouver la condition de compatibilité du système". Soit par exemple $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 2t - 2 \end{cases}$ alors

$$\begin{cases} -t + 3 &= x \\ 2t - 2 &= y \end{cases} \iff$$

La deuxième ligne du système est alors une *condition de compatibilité* : le système admet une solution (t) si et seulement si cette condition est satisfaite. Autrement dit, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = -t + 3$ et $y = 2t - 2$ si et seulement si $y + 2x = 4$: on a trouvé une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Exercice 10

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $-3x + 6y = 1$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$

4 Plans et droites de l'espace

Dans toute cette partie on travaille dans l'espace $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ qu'on munit du repère canonique $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

4.1 Plans de l'espace

Définition 44
Soit $A \in \mathcal{E}$ un point de l'espace et soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires* de l'espace. Le plan passant par A et orienté par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \ \text{ tel que } \exists\, t, s \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u} + s\,\vec{v}\}$$

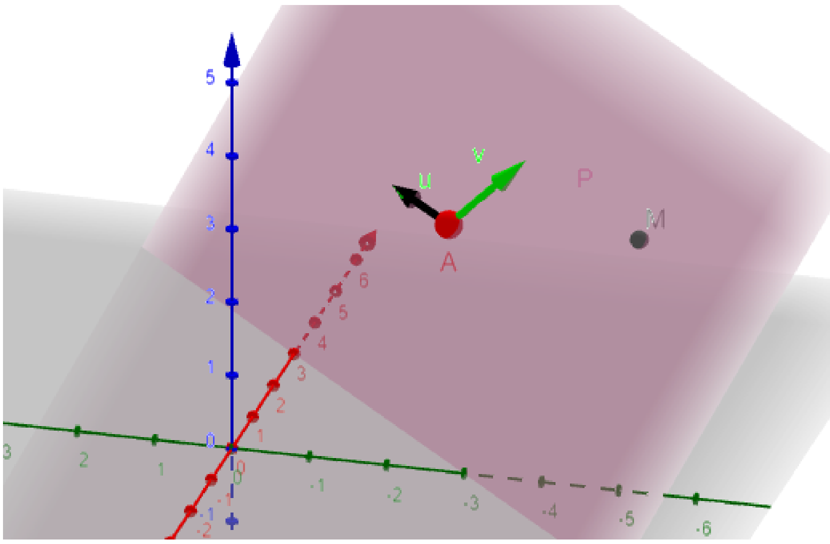


Figure 10 – Le plan passant par A et orienté par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Animation disponible à `https://www.geogebra.org/3d/u6ykjfzb`

Remarque 45
Il est essentiel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires (donc en particulier non nuls).

Équation paramétrique

La définition choisie permet d'obtenir la forme des points du plan $\mathcal{P}$ en fonction de deux paramètres $t, s \in \mathbb{R}$. En effet, pour $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et orienté par $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, on a :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\iff \exists\, t, s \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u} + s\,\vec{v} \\ &\iff \exists\, t, s \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t x_u + s x_v \\ y = y_A + t y_u + s y_v \\ z = z_A + t z_u + s z_v \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce dernier système est ce qu'on appelle une équation paramétrique du plan.

Remarque 46

On s'autorise à additionner points et vecteurs pour écrire $\mathcal{P} = \{A + t\,\vec{u} + s\,\vec{v},\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Il faut alors, sans hésitation, pouvoir dire que si $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$ alors $\boxed{\exists\, t, s \in \mathbb{R} \text{ tels que}} \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t x_u + s x_v \\ y = y_A + t y_u + s y_v \\ z = z_A + t z_u + s z_v \end{array} \right.$

Exercice 11

Déterminer une équation paramétrique des plans suivants :

1. $\mathcal{P}_1$ passant par $A_1(1, 4, -1)$ et dirigé par $\vec{u}_1(1, 0, 1)$ et $\vec{v}_1(-2, 1, 4)$
2. $\mathcal{P}_2$ passant par $A_3(1, 1, 1)$, $B_3(2, 1, 4)$ et $C_3(1, 2, 1)$.

Équation cartésienne

Une autre façon de définir un plan consiste à s'appuyer non plus sur une paire de vecteurs directeurs, mais sur un seul vecteur *normal*.

Définition 47

Soient $A \in \mathcal{E}$ un point de l'espace, et $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul. Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} \,.\, \vec{n} = 0\}$$

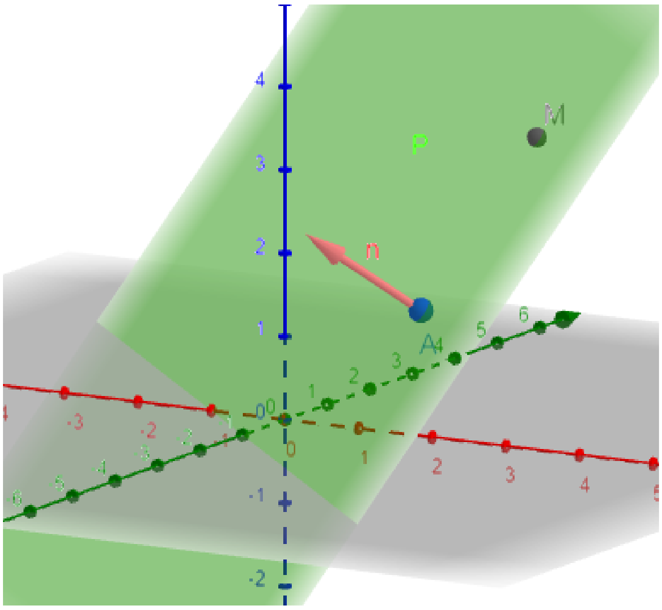


FIGURE 11 – Plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Animation disponible à `https://www.geogebra.org/3d/zkqhwzrd`

L'écriture avec un vecteur normal permet d'obtenir une équation sur les coordonnées d'un point M garantissant son appartenance au plan $\mathcal{P}$. En effet, si $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(x_n, y_n, z_n)$ alors :

$$M = (x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \,.\, \vec{n} = 0 \iff (x - x_A)x_n + (y - y_A)y_n + (z - z_A)z_n = 0.$$

On dit que l'équation $(x - x_A)x_n + (y - y_A)y_n + (z - z_A)z_n = 0$ (ou encore $x_n x + y_n y + z_n z = x_A x_n + y_A y_n + z_A z_n$) est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Remarque 48

1. Une équation cartésienne d'un plan est donc une relation de la forme $\boxed{ax + by + cz = d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifient $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (car $\vec{n} \neq \vec{0}$).
2. Lorsque $c \neq 0$, on peut écrire $z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c}$. Le plan apparaît alors comme représentation graphique de la fonction de deux variables $f : (x, y) \longmapsto -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c}$ (*cf* chapitre sur les fonctions de deux variables).

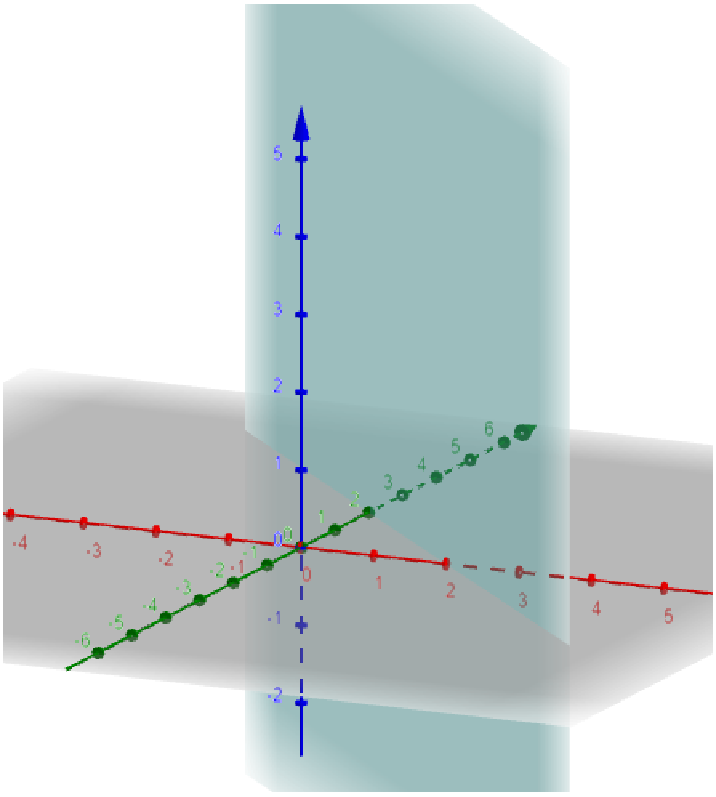


Figure 12 – Le plan “vertical” d’équation $y = 2 - x$

3. Lorsque $c = 0$, le plan est “vertical” car son équation $ax + by = d$ indique que si $M(x, y, z)$ est un point du plan, alors tout point “directement au-dessus ou en-dessous” $M'(x, y, z')$ appartient aussi à $\mathcal{P}$.

Exercice 12

Déterminer une équation cartésienne du plan :

1. $\mathcal{P}_1$ passant par $A_1(2, -1, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}_1(-1, 2, 1)$
2. $\mathcal{P}_2$ passant par $A_2(3, 4, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}_2(1, -1, 0)$
3. $\mathcal{P}_3$ passant par les points $A_4(0, 0, 1)$, $B_4(-\frac{3}{7}, \frac{134}{71}, 1)$ et $C_4(\pi, \sqrt{2}, 1)$

Comment passer d'une représentation à l'autre ?

Il faut être en mesure de passer de la représentation paramétrique à la représentation cartésienne et inversement.

Pour passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, il faut "résoudre l'équation". Soit par exemple $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y + 4z = 5$, alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 3y + 4z = 5 \iff$$

$$\iff$$

Réciproquement, pour passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne, il faut "trouver la condition de compatibilité du système". Soit par exemple $\mathcal{P}$ le plan d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = t + s + 2 \\ y = 2t + 3s + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases}$ alors

$$\begin{cases} t + s + 2 &= x \\ 2t + 3s + 2 &= y \\ -t + 1 &= z \end{cases} \iff$$

La troisième ligne du système est alors une *condition de compatibilité* : le système admet une solution (t, s) si et seulement si cette condition est satisfaite. Autrement dit, il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $x = -t + 3$, $y = 2t - 2$ et $z = -t + 1$ si et seulement si $3x - y + z = 5$: on a trouvé une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 13

1. Déterminer une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne $2x - 3y + z = 1$
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2s - 1 \\ y = -3t - s \\ z = 2t + 5s + 1 \end{cases}$

4.2 Droites de l'espace

Définition 49
Soit $A \in \mathcal{E}$ un point de l'espace et soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul. La droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} \text{ tel que } \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u}\}$$

Remarque 50
La définition est la même que dans le plan, et conduit, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$ à la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + t\,x_u \\ y = y_A + t\,y_u \\ z = z_A + t\,z_u \end{cases}$.

Pour finir, les droites de l'espace peuvent être obtenues comme intersections de plans, comme l'illustre la figure suivante :

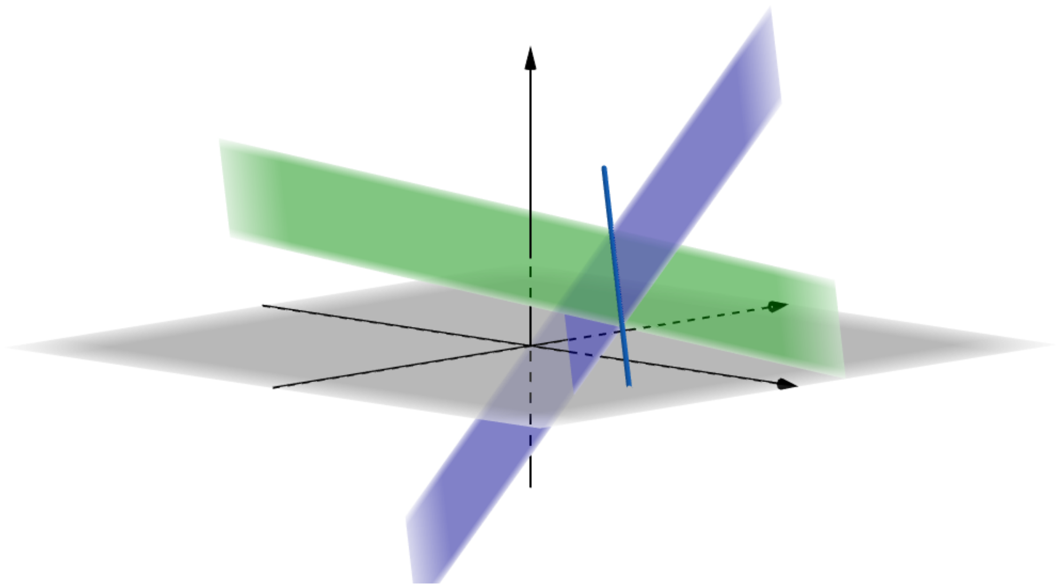


FIGURE 13 – Une droite de l'espace vue comme intersection de deux plans

Attention, l'intersection de deux plans n'est donc pas toujours une droite !
On le voit notamment avec la représentation cartésienne des plans. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$. Alors leur intersection est donnée en résolvant un sytème linéaire :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \big(M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \text{ et } M(x,y,z) \in \mathcal{P}_2\big) \iff \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Le système linéaire à deux équations ainsi obtenu peut alors :

- n'avoir pas de solution, dans ce cas $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$
- être de rang 1, dans ce cas $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un plan (et donc $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$),
- être de rang 2, dans ce cas $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite.