BCPST 1B — Interro 24 (sujet B) : /10 pts — 2025-2026

NOM :

PRENOM :

Question 4 (/2 pts). Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ par primitivation directe.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2\times 2^2} + \frac{1}{2\times 1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\left(\frac{1}{x^3} = x^{-3}\ ;\ \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}\right)$$

Question 5 (/4 pts). Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/6} t\cos(2t)\,dt$ via une intégration par parties.

Posons $u(t) = t$ et $v(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$; alors $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \cos(2t)$.
Comme u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ on a par intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/6} t\cos(2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t\sin(2t)\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\sin(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) - 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{12}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos(0)\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{24} - \frac{1}{8} = \frac{\pi\sqrt{3} - 3}{24}$$

Question 6 (/4 pts). Calculer $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx$ via le changement de variables $u = \ln(x)$.

On a $du = \frac{1}{x}dx$ donc $\frac{\ln(\ln(x))}{x}dx = \ln(u)\,du$.

De plus, si $x = e$ alors $u = \ln(e) = 1$
si $x = e^2$ alors $u = \ln(e^2) = 2$

Ainsi par changement de variables :

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx = \int_1^2 \ln(u)\,du = \left[u\ln(u) - u\right]_1^2$$

$$= 2\ln(2) - 2 - (1\ln(1) - 1)$$

$$= 2\ln(2) - 1$$

NOM :

PRENOM :

Question 7 (/2 pts). Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ par primitivation directe.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

Question 8 (/4 pts). Calculer $\int_0^{\pi/6} t\sin(2t)\,dt$ via une intégration par parties.

Posons $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{\cos(2t)}{2}$; alors $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \sin(2t)$.
Comme u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ on a par intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/6} t\sin(2t)dt = \left[-\frac{t}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} -\frac{1}{2}\cos(2t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/6}$$
$$= -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0\right)$$
$$= \frac{-\pi + 3\sqrt{3}}{24}$$

Question 9 (/4 pts). Calculer $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$ via le changement de variables $u = \ln(x)$.

On a $du = \frac{1}{x}dx$ donc $\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx = \sqrt{u}\,du$

De plus si $x = 1$ alors $u = \ln(1) = 0$
si $x = e$ alors $u = \ln(e) = 1$

Ainsi par changement de variables :

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx = \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$