Exercice 1

1. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$?
   (a) (u, v) où $u = (1, 2)$ et $v = (-1, 2)$
   (b) (u, v) où $u = (2, 4)$ et $v = (1, 2)$
   (c) (u, v, w) où $u = (1, 2)$, $v = (1, 3)$ et $w = (3, 4)$
   (d) (u, v) où $u = (a, 2a)$ et $v = (1, -a)$ (où $a \in \mathbb{R}$)
2. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?
   (a) (u, v, w) où $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (3, 1, 0)$
   (b) (u, v, w) où $u = v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 2)$
   (c) (u, v, w) où $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, a, -1)$ et $w = (a, 1, a)$ (où $a \in \mathbb{R}$)

Exercice 2

On rappelle la propriété suivante, admise en cours :

Proposition : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. On a :
a) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
b) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (inégalité triangulaire).

Cet exercice consiste à démontrer cette proposition. On fixe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on va démontrer les deux inégalités souhaitées pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Démontrez les inégalités dans le cas où $\vec{u} = \vec{0}$. Dans la suite de l'exercice on suppose désormais que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. On considère la fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $P : t \longmapsto ||t\vec{u} + \vec{v}||^2$.
   (a) Montrer que P est une fonction polynomiale de degré 2 dont on précisera les coefficients.
   (b) Quel est le signe de P sur $\mathbb{R}$? Que peut-on en déduire sur son discriminant ?
   (c) Conclure que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est satisfaite.
3. En déduire que l'inégalité triangulaire est satisfaite.

Exercice 3

1. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'identité : $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2||\vec{u}||^2 + 2||\vec{v}||^2$.
   Proposer une interprétation géométrique de ce résultat. On tracera des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques et on représentera les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$.
   Proposer une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 4

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on définit les vecteurs du plan suivants : $\vec{u}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\vec{v}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le couple $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base orthonormée du plan.
2. On note respectivement $(x_{1,\theta}, y_{1,\theta})$ et $(x_{2,\theta}, y_{2,\theta})$ les coordonnées dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ des vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 3)$ et $\vec{u}_2 = (-2, 1)$. Déterminer $(x_{1,\theta}, y_{1,\theta})$ et $(x_{2,\theta}, y_{2,\theta})$.
3. Vérifier alors que la quantité $x_{1,\theta}x_{2,\theta} + y_{1,\theta}y_{2,\theta}$ est indépendante de θ et égale à $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$.

Exercice 5 (projeté orthogonal sur une droite)

1. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A = (-1, 1)$ et orientée par $\vec{u} = (1, 1)$. On s'intéresse au point $B = (1, 1)$. On souhaite déterminer la distance du point B à la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire trouver le point $H \in \mathcal{D}$ tel que la distance BH soit la plus petite distance entre B et un point de $\mathcal{D}$.

   (a) Représenter sur un schéma, la droite $\mathcal{D}$, le point B et la distance BM pour $M \in \mathcal{D}$. Placer alors intuitivement le point H recherché.

   (b) Décrire la droite $\mathcal{D}$ sous la forme $\mathcal{D} = \{M(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ où $M(t)$ est un point du plan dont on donnera les coordonnées en fonction de t.

   (c) Donner alors l'expression de $f(t) = ||\overrightarrow{BM(t)}||$ en fonction de t.

   (d) Étudier la fonction f et montrer qu'elle admet un minimum en un certain $t^* \in \mathbb{R}$. On note $H = M(t^*)$. Quelle est la distance de B à $\mathcal{D}$?

   (e) Vérifier que $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

De manière générale, on peut donc donner la définition suivante :

Définition :

- Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et soit B un point du plan. On appelle projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$).
- La distance BH est alors appelée distance de B à $\mathcal{D}$ et notée $d(B, \mathcal{D})$. Il s'agit de la plus petite distance entre B et un point de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que : $d(B, \mathcal{D}) = BH = \min\limits_{M \in \mathcal{D}} BM$.

2. Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x - y = 3$, et soit $B = (4, -5)$.

   (a) Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, puis en revenant au premier point de la définition ci-dessus, déterminer le projeté orthogonal H de B sur $\mathcal{D}$.

   (b) Vérifier alors que BH est la distance minimale entre B et un point de $\mathcal{D}$.

Exercice 6

1. Donner une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace passant par $A = (1, 3, 4)$ et dirigée par $\vec{u} = (2, -1, 5)$.
2. Donner une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace passant par $B = (-1, 0, 5)$ et par $C = (6, 1, 0)$.

Exercice 7

Déterminer l'intersection des plans suivants :

1. $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + z = 1$.
2. $\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4$ où $\mathcal{P}_3 : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - s \\ z = t \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_4 : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$