Programme de colles : semaine 26, du 18/5 au 22/5

Attention : *conformément au colloscope, il n'y a pas de colle la semaine du 11/5 au 15/5.*
Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Intégration

- Calculs de primitives et d'intégrales par intégration directe. On rappelle que des calculs d'intégrale utilisant $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ ont été faits en remédiation précédemment
- exemples de décompositions en éléments simples pour calculer des intégrales de fractions rationnelles. *Aucun théorème général sur la décomposition en éléments simples n'est au programme de BCPST.*
- définition de l'intégrale comme aire sous la courbe
- Théorème fondamental de l'analyse : la fonction $F_a : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a
- règles de calculs pour les intégrales : linéarité, Chasles
- positivité et croissance de l'intégrale, application à des études de suites définies par une intégrale (sens de variation, limite par encadrement)
- inégalité triangulaire
- si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$
- dérivation d'expressions du type $\phi : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ où f est continue sur $[a, b]$ et u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $[a, b]$. *La formule ne doit pas être apprise par cœur mais redémontrée dans les exercices.*
- intégration par parties
- changement de variables. *Les élèves sont encouragés à présenter les changements de variables "à la physicienne".*
- si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et paire (resp. impaire) alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$ (resp. $\int_{-a}^a f = 0$).
- sommes de Riemann d'une fonction continue. On note $R_{n,g}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ et $R_{n,d}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
  Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ alors $\lim_{n\to+\infty} R_{n,g}(f) = \lim_{n\to+\infty} R_{n,g}(f) = \int_a^b f$.

2 Géométrie du plan et de l'espace

Les équations de cercles ont été vues uniquement à travers un exercice. Le projeté orthogonal et la démonstration des inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz n'ont pas encore été abordées en classe.

- notion de vecteur et de base :
  - repérage d'un point/d'un vecteur par ses coordonnées
  - combinaisons linéaires, relation de Chasles
  - colinéarité, coplanarité
  - bases du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$, coordonnées d'un vecteur dans une base
  - déterminant de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$
  - u et v sont colinéaires ssi $\det(u, v) = 0$
- produit scalaire et orthogonalité :
  - définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à partir des coordonnées dans la base canonique
  - bilinéarité, symétrie, caractère défini positif du produit scalaire
  - orthogonalité, norme, propriétés élémentaires. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, identité $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + ||\vec{v}||^2$, théorème de Pythagore.
  - une famille de vecteurs non nuls orthogonaux et de bon cardinal forme une base *(ce résultat a été admis)*, base orthonormée

  - les formules donnant le produit scalaire et le déterminant en fonction des coordonnées sont valables lorsque les coordonnées sont données dans une base orthonormée *(ce résultat a été admis)*
- droites et plans :
  - équation paramétrique d'une droite du plan ou de l'espace (resp. d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur directeur (resp. d'un couple de vecteurs directeurs)
  - équation cartésienne d'une droite du plan (ou d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur normal
  - savoir passer de l'équation cartésienne à l'équation paramétrique et inversement
  - système d'équations cartésienne d'une droite de l'espace. Exemples d'intersections de plans

3 Informatique en langage Python

Résolution approchée d'équations différentielles par la méthode d'Euler. *La méthode d'Euler n'est pas à connaître par les élèves, mais elle peut être rappelée et utilisée dans les exercices.*

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer le théorème d'intégrations par parties.
2. Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ grâce à une intégrations par parties.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire (resp. impaire) et soit $a > 0$, démontrer que $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ (resp. $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$).
4. Donner la définition des sommes de Riemann d'une fonction f définie sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de ces sommes ?
5. Donner la définition du déterminant de deux vecteurs u et v du plan exprimés dans la base canonique. Compléter ensuite la propriété suivante : $\det(u, v) \neq 0 \iff$ la famille (u, v) est ...
6. Donner la définition du produit scalaire et de la norme dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
7. En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrer que pour tous vecteurs u, v on a : $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\,u\,.\,v + ||v||^2$, puis en déduire le théorème de Pythagore.
8. Donner la définition d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'une famille de vecteurs choisie par l'examinateur est une telle base.
9. Déterminer une équation cartésienne d'une droite du plan dont l'examinateur donne la représentation graphique, et, inversement, dessiner une droite du plan dont l'examinateur donne une équation cartésienne.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 12 (à nouveau des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement, on pourra adopter des notations "à la physicienne"), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7148&v=595db`

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.