**CONCOURS BLANC**
**Mathématiques - mardi 12 mai 2026**
**Durée : 3 h**

**L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.**

Chaque candidate ou candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il convient d'alerter au plus tôt l'équipe de surveillance qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Si, au cours de l'épreuve, une candidate ou un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle ou il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives prises.

Ce sujet comporte 3 exercices indépendants.

On pourra admettre le résultat d'une question ou d'une sous-question pour passer aux questions suivantes, à condition de le mentionner explicitement.

Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin du sujet. **Pour les questions d'informatique, on considérera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.**

**Exercice 1** (Un montage électrique)**.**
On propose de modéliser un câble coaxial par un circuit électrique constitué d'une chaîne de $n$ modules identiques comportant chacun trois conducteurs ohmiques en dérivation avec un quatrième conducteur ohmique. Tous les conducteurs ohmiques sont de résistance $r > 0$. *Dans tout l'exercice, on fixe donc* $r > 0$.

Pour simuler un câble de grande longueur on souhaite déterminer la valeur de la résistance équivalente de la chaîne lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

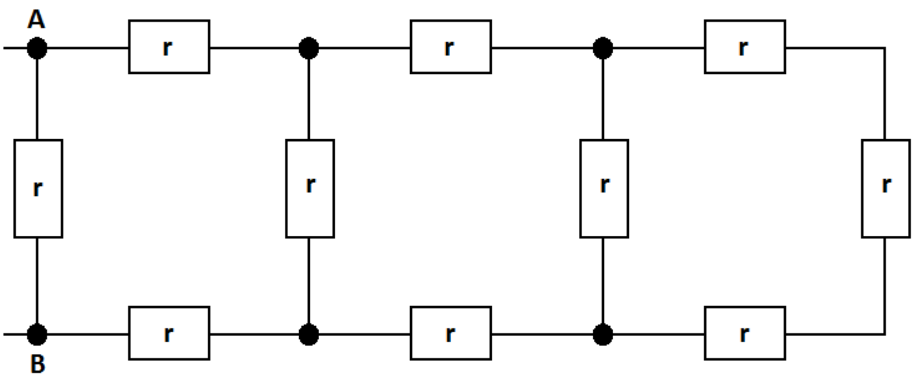



Schéma du circuit lorsque $n = 3$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $R_n$ la résistance équivalente de la chaîne à $n$ modules ; et on pose par convention $R_0 = r$. Pour $n = 1$, la chaîne est par exemple équivalente à un circuit avec un seul conducteur ohmique de résistance $R_1$ (figure de gauche ci-dessous).
De manière générale, le lien entre $R_n$ et $R_{n+1}$ s'obtient en disant que les deux circuits présentés sur la figure de droite sont équivalents :

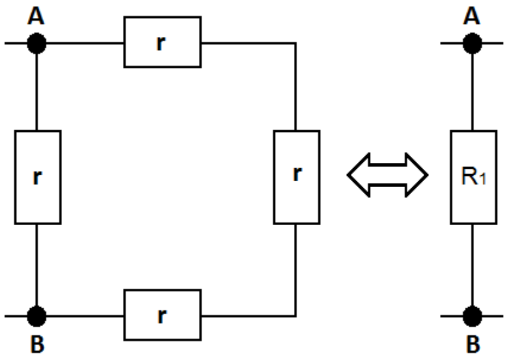
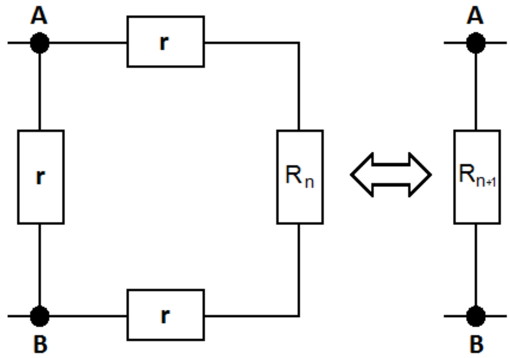



Schéma du circuit lorsque $n = 1$




Passage de $R_n$ à $R_{n+1}$

On admet que les règles de calculs des résistances équivalentes en électricité donnent : $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{3r}$, et, de manière générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + R_n}.$$

1. (a) Montrer que $R_1 = \dfrac{3}{4}r$. De manière générale, montrer que pour tout $n \geq 0$, $R_{n+1} = f(R_n)$ où $f$ est la fonction donnée par
$$f : x \longmapsto r\,\frac{2r + x}{3r + x}.$$
   (b) Justifier alors que la suite $(R_n)$ est correctement définie.
   (c) i. Écrire une fonction Python `Terme(n,r)` d'arguments un entier naturel $n$ et $r > 0$, et qui calcule et renvoie la valeur du terme $R_n$.
      ii. En utilisant la fonction `Terme`, écrire alors une fonction `Liste_termes(N,r)` qui prend en arguments un entier $N$ non nul et $r > 0$ et qui renvoie la liste des termes de $R_0$ à $R_N$.
      iii. Pour optimiser le temps de calcul de la fonction `Liste_termes`, proposer une autre fonction `Liste_mieux(N,r)` qui renvoie la liste $[R_0, \ldots, R_N]$ sans utiliser la fonction `Terme`.
      iv. Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe de la suite $(R_n)$ pour $n \in [\![0, N]\!]$. *On utilisera des variables globales pour $r$ et $N$.*
2. Dans cette question, on étudie la convergence de la suite $(R_n)$.
   (a) Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que $(R_n)$ converge.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = (\sqrt{3} - 1)r$. Interpréter ce résultat physiquement.
3. Dans cette question, on note $R^* = (\sqrt{3} - 1)r$ la limite de la suite $(R_n)$ et on s'intéresse à quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$ choisir pour que $R_n$ soit suffisamment proche de $R^*$.
   (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :
$$\forall x \geq 0, \ |f(x) - R^*| \leq \frac{1}{9}|x - R^*|.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |R_n - R^*| \leq \dfrac{(2 - \sqrt{3})r}{9^n}$.
   (c) Écrire une fonction Python `Premier(r,eps)` prenant en arguments la valeur $r$ et un seuil $\varepsilon > 0$ et renvoyant le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n - R^*| \leq \varepsilon$.

**Exercice 2** (Autofécondation d'un individu diploïde)**.**
On s'intéresse à l'évolution du génotype d'un individu diploïde se reproduisant par autofécondation. On se limite à l'étude d'un seul gène présentant deux allèles différents $a$ et $A$. L'individu possède deux versions du gène, il peut donc être hétérozygote $aA$, homozygote $aa$ ou homozygote $AA$.

On suppose qu'il se reproduit à chaque génération par autofécondation. Le génotype du descendant dépend alors uniquement du génotype de l'ancêtre et de l'aléa, lié aux mécanismes de la reproduction sexuée (méiose avec séparation des chromosomes homologues et fécondation avec rencontre aléatoire des gamètes).

1. (a) Compléter le tableau ci-contre en donnant les probabilités conditionnelles d'avoir un descendant $aa$, $aA$ ou $AA$ sachant qu'on a un ancêtre $aa$, $aA$ ou $AA$. *On recopiera le tableau sur la copie et on justifiera ses réponses par des explications en Français.*

| | ancêtre $aa$ | ancêtre $aA$ | ancêtre $AA$ |
|---|---|---|---|
| descendant $aa$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| descendant $aA$ | ? | ? | ? |
| descendant $AA$ | ? | ? | ? |

   (b) Écrire une fonction Python `Desendant(g)` prenant en en argument le génotype `g` d'un individu et renvoyant le génotype de son descendant. *On utilisera la bibliothèque* `random` *et on représentera le génotype par une chaîne de caractères.*

   (c) Dans cette question uniquement, on suppose que le premier individu est hétérozygote. En utilisant la fonction précédente, écrire un programme Python permettant d'estimer la probabilité que son descendant de la 5ème génération soit aussi hétérozygote.

Dans la suite de l'exercice, on note $aa_n$ (respectivement $aA_n$ et $AA_n$) l'événement "l'individu de la $n$-ème génération est de génotype $aa$" (respectivement $aA$ et $AA$). On note $p_n, q_n$ et $r_n$ les probabilités suivantes : $p_n = \mathbb{P}(aa_n)$, $q_n = \mathbb{P}(aA_n)$, $r_n = \mathbb{P}(AA_n)$, et on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

2. (a) Démontrer que pour tout $n \in N$, on a $X_{n+1} = MX_n$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser.

   (b) En déduire l'expression de $X_n$ en fonction de $M^n$ et de $X_0$.

3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $M^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n & 0 \\ 0 & y_n & 0 \\ 0 & x_n & 1 \end{pmatrix}$ où $(x_n)$ et $(y_n)$ sont les suites définies par $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $y_1 = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{4}$ et $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{2}$.

   (b) En déduire l'expression de $M^n$ puis celles de $p_n$, $q_n$ et $r_n$ en fonction de $n$, $p_0$, $q_0$ et $r_0$.

4. (a) On suppose que $p_0, q_0, r_0 \in ]0,1[$. Quelles sont les limites des suites $(p_n)$, $(q_n)$ et $(r_n)$ ? Interpréter ce résultat en terme des génotypes des descendants.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux évènements $H_n$ : "le descendant de la $n$-ème génération est homozygote" et $T_n$ : "c'est à partir de la $n$-ème génération que les tous les descendants sont homozygotes". Montrer que $\mathbb{P}(H_n) = 1 - q_n$ puis que $\mathbb{P}(T_n) = \dfrac{q_0}{2^n}$.

   (c) On s'intéresse à la quantité $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(T_k)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = q_0 \times \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right).$$

   En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$ et interpréter ce résultat.

**Exercice 3** (Introduction aux hyperplans)**.**
Dans cet exercice, on considère uniquement des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si $E$ est un tel espace et si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *hyperplan de* $E$ tout sous-espace vectoriel $H$ de $E$ tel que $\dim(H) = n - 1$.

On propose d'étudier différentes propriétés des hyperplans.

1. Dans cette question, on présente divers exemples d'hyperplans.
   (a) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + 3y + z = 0\}$. Montrer que $F$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, et soit
   $$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$
   Montrer que $H$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. *On pourra supposer que, par exemple,* $a_1 \neq 0$.
2. Dans cette question, on fixe $E$ un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $H$ un hyperplan de $E$. On présente un résultat général de décomposition de tout vecteur de $E$ comme une somme d'un élément de $H$ et d'un élément de $E \backslash H$.
   (a) Monter que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $H \subset F$ alors on a $F = H$ ou $F = E$.

   Dans toute la suite, on fixe $w \in E \backslash H$.
   (b) Soit $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$ une base de $H$. Montrer que $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, w)$ est une base de $E$. *On pourra considérer l'espace* $F = \mathrm{Vect}(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, w)$.
   (c) En déduire que tout vecteur de $E$ s'écrit comme la somme d'un élément de $H$ et d'un multiple de $w$, c'est-à-dire que :
   $$\forall u \in E, \ \exists (v, \lambda) \in H \times \mathbb{R} \ : \ u = v + \lambda w.$$
3. Dans cette question, on détermine la forme générale des hyperplans de $\mathbb{R}^n$. On fixe $H$ un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^n \backslash H$.
   (a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $e_k - \lambda_k w \in H$.
   (b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $x - (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n)w \in H$ et en déduire que $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n = 0\}$.
   (c) Montrer que si $H_1$ et $H_2$ sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$ tels que $H_1 \neq H_2$ alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$. *Ce résultat généralise le fait que dans* $\mathbb{R}^3$*, l'intersection de deux plans distincts non parallèles est une droite.*

## Annexe Python

- Dans le module `matplotlib.pyplot` importé sous l'alias `plt` :
  `plt.plot(X,Y)` prend en entrée deux vecteurs ou deux listes de même taille, et réalise le tracé des points d'abscisses prises dans `X` et d'ordonnées prises dans `Y`.
  On utilise `plt.show()` pour afficher le tracé.
- Dans le module `random` importé sous l'alias `rd` :
  `rd.random()` renvoie un nombre réel compris entre 0 et 1.
  `rd.choice(L)` renvoie un élément de la liste `L` choisi au hasard.

---

**FIN DU SUJET**

---