

CONCOURS BLANC
Mathématiques - mardi 12 mai 2026
Corrigé (rédigé à l'aide d'une IA)

Exercice 1 (Un montage électrique).

1. (a) D'après l'énoncé,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{3r} = \frac{4}{3r}$$

donc $\boxed{R_1 = \frac{3}{4}r.}$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + R_n} = \frac{2r + R_n + r}{r(2r + R_n)} = \frac{3r + R_n}{r(2r + R_n)}.$$

Ainsi

$$R_{n+1} = r \frac{2r + R_n}{3r + R_n}.$$

En définissant la fonction f sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = r \frac{2r + x}{3r + x},$$

on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{n+1} = f(R_n).$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} = f(R_n) \text{ avec } f(x) = r \frac{2r+x}{3r+x}.}$

(b) La fonction f est bien définie sur \mathbb{R}^+ car pour tout $x \geq 0$:

$$3r + x \geq 3r > 0.$$

De plus, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = r \frac{2r + x}{3r + x} \geq 0.$$

Ainsi $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$.

Comme $R_0 = r \in \mathbb{R}^+$, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (R_n) \text{ est correctement définie.}}$

(c) i. pour la fonction Terme on peut écrire

```

1 def Terme (n, r) :
2   R=r
3   for k in range(n) :
4     R = r*(2*r+R)/(3*r+R)
5   return R

```

ii. pour la fonction Liste_termes on peut écrire :

```

1 def Liste_termes(N, r) :
2     return [Terme(k, r) for k in range(N+1)]

```

iii. pour la fonction Liste_mieux on peut écrire :

```

1 def Liste_mieux(N, r) :
2     R = r
3     L = [R]
4     for k in range(N) :
5         R = r*(2*r+R)/(3*r+R)
6         L.append(R)
7     return L

```

iv. enfin, pour le graphe on peut écrire :

```

1 r = 1
2 N = 20
3
4 absi = [k for k in range(N+1)]
5 ordo = Liste_mieux(N, r)
6
7 plt.plot(absi, ordo)
8 plt.xlabel("n")
9 plt.ylabel("R_n")
10 plt.show()

```

2. (a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = r \frac{(3r+x) - (2r+x)}{(3r+x)^2} = \frac{r^2}{(3r+x)^2}.$$

Comme $r > 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

- (b) Tout d'abord, comme vu à la question 1.(b), la suite (R_n) est minorée par 0. Montrons ensuite que (R_n) est décroissante en montrant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} \leq R_n$.

Pour $n = 0$, on a $R_1 = \frac{3}{4}r \leq r = R_0$ donc la propriété est vraie.

Supposons ensuite que $R_{n+1} \leq R_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme R_n et R_{n+1} appartiennent à \mathbb{R}^+ et que f est croissante sur \mathbb{R}^+ cela implique que $f(R_{n+1}) \leq f(R_n)$ c'est-à-dire $R_{n+2} \leq R_{n+1}$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi (R_n) est décroissante et minorée donc (R_n) converge.

- (c) Notons l la limite de (R_n) .

Par conservation des inégalités lors du passage à la limite :

$$l \geq 0.$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R}^+ , donc en passant à la limite dans

$$R_{n+1} = f(R_n),$$

on obtient :

$$l = f(l).$$

Ainsi

$$l = r \frac{2r + l}{3r + l}.$$

Comme $3r + l > 0$, on peut multiplier :

$$l(3r + l) = 2r^2 + rl.$$

Donc

$$l^2 + 2rl - 2r^2 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 4r^2 + 8r^2 = 12r^2.$$

Les solutions sont donc

$$l = \frac{-2r \pm 2r\sqrt{3}}{2} = -r \pm r\sqrt{3}.$$

Comme $l \geq 0$, on obtient nécessairement

$$l = (\sqrt{3} - 1)r.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = (\sqrt{3} - 1)r.}$

Physiquement, cela signifie que lorsque la longueur du câble tend vers $+\infty$, la résistance équivalente du circuit se rapproche d'une valeur limite finie égale à $(\sqrt{3} - 1)r$.

3. (a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ et, d'après la question précédente :

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = \frac{r^2}{(3r + x)^2}.$$

Comme $x \geq 0$:

$$3r + x \geq 3r$$

donc

$$(3r + x)^2 \geq 9r^2.$$

Ainsi

$$|f'(x)| = \frac{r^2}{(3r + x)^2} \leq \frac{1}{9}.$$

Soit maintenant $x \geq 0$. La fonction f est dérivable sur $]x, R^*[$ et continue sur $[x, R^*]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe c entre x et R^* tel que

$$f(x) - f(R^*) = f'(c)(x - R^*).$$

Or R^* est un point fixe de f , donc $f(R^*) = R^*$.

Ainsi

$$f(x) - R^* = f'(c)(x - R^*).$$

En prenant les valeurs absolues :

$$|f(x) - R^*| = |f'(c)| |x - R^*| \leq \frac{1}{9} |x - R^*|.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad |f(x) - R^*| \leq \frac{1}{9} |x - R^*|}$$

(b) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n - R^*| \leq \frac{(2 - \sqrt{3})r}{9^n}.$$

- Pour $n = 0$:

$$|R_0 - R^*| = |r - (\sqrt{3} - 1)r| = (2 - \sqrt{3})r.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

- Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$|R_{n+1} - R^*| = |f(R_n) - R^*| \leq \frac{1}{9} |R_n - R^*|$$

d'après la question précédente.

Puis, par hypothèse de récurrence :

$$|R_{n+1} - R^*| \leq \frac{1}{9} \times \frac{(2 - \sqrt{3})r}{9^n} = \frac{(2 - \sqrt{3})r}{9^{n+1}}.$$

Ceci achève la récurrence.

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n - R^*| \leq \frac{(2 - \sqrt{3})r}{9^n}}$$

(c) On peut par exemple écrire :

```
1 def seuil(r, epsilon):
2     R = r
3     Retoile = (3**(1/2)-1) * r
4     n = 0
5     while abs(R - Retoile) > epsilon:
6         R = r * (2 * r + R) / (3 * r + R)
7         n += 1
8     return n
```

Exercice 2 (Autofécondation d'un individu diploïde).

1. (a)

	<i>aa</i>	<i>aA</i>	<i>AA</i>
<i>aa</i>	1	$\frac{1}{4}$	0
<i>aA</i>	0	$\frac{1}{2}$	0
<i>AA</i>	0	$\frac{1}{4}$	1

En effet :

- un individu *aa* ne produit que des gamètes *a*, donc tous ses descendants sont de génotype *aa* ;
- un individu *AA* ne produit que des gamètes *A*, donc tous ses descendants sont de génotype *AA* ;
- un individu *aA* produit des gamètes *a* et *A* avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacune. La probabilité qu'il produise deux gamètes identiques est donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Et ainsi la probabilité qu'il produise deux gamètes différents vaut $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(b) On peut par exemple écrire :

```
1 def descendant(g):
2     if g == "aa":
3         return "aa"
4
5     if g == "AA":
6         return "AA"
7
8     x = rd.random()
9
10    if x < 0.25:
11        return "aa"
12    elif x < 0.75:
13        return "aA"
14    else:
15        return "AA"
```

(c) On peut écrire :

```
1 N = 10000
2 X = 0
3
4 for k in range(N):
5     g = "aA"
6     for i in range(5):
7         g = descendant(g)
8     if g == "aA":
9         X += 1
10
11 p = X/N
```

Après exécution du code, la variable *p* contient une estimation de la probabilité demandée.

2. (a) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements (aa_n, aA_n, AA_n) :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(aa_{n+1}) = \mathbb{P}_{aa_n}(aa_{n+1})\mathbb{P}(aa_n) + \mathbb{P}_{aA_n}(aa_{n+1})\mathbb{P}(aA_n) + \mathbb{P}_{AA_n}(aa_{n+1})\mathbb{P}(AA_n) \\ &= p_n + \frac{1}{4}q_n. \end{aligned}$$

De même :

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n$$

et

$$r_{n+1} = r_n + \frac{1}{4}q_n.$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\boxed{X_{n+1} = MX_n}$$

avec

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Une récurrence immédiate montre alors que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.}$$

3. (a) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n & 0 \\ 0 & y_n & 0 \\ 0 & x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pour $n = 1$, cela correspond exactement à la définition de M avec

$$x_1 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{1}{2}.$$

- Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \geq 1$.

Alors :

$$M^{n+1} = M^n M$$

donc

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & x_n & 0 \\ 0 & y_n & 0 \\ 0 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2x_n+1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{y_n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2x_n+1}{4} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient bien la forme voulue avec :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{4}$$

et

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.$$

Ceci achève la récurrence.

(b) La suite (y_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $y_1 = \frac{1}{2}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times y_1 = \frac{1}{2^n}.$$

Cherchons maintenant x_n . Posons :

$$u_n = x_n - \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2x_n + 1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{x_n}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et :

$$u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Donc :

$$u_n = -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}.$$

Finalement :

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}}$$

Or

$$X_n = M^n X_0 = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{q_n = \frac{q_0}{2^n} ; p_n = p_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) q_0 ; r_n = r_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) q_0.}$$

4. (a) Comme

$$q_n = \frac{q_0}{2^n},$$

avec $2 > 1$ on a :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0.}$$

il s'en suit aussi que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p_0 + \frac{q_0}{2}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r_0 + \frac{q_0}{2}.$$

Interprétation : à long terme, la probabilité qu'un descendant soit hétérozygote tend vers 0. Les descendants finissent donc par être homozygotes.

- (b) L'évènement H_n est le contraire de l'évènement "le descendant de la n -ième génération est hétérozygote".

Ainsi :

$$H_n = \overline{aA_n}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(H_n) = 1 - q_n.$$

Par ailleurs, l'évènement T_n est réalisé lorsque l'individu de la génération $n - 1$ est hétérozygote et que l'individu de la génération n est homozygote (car lorsqu'un individu est homozygote, tous ses descendants le restent).

Ainsi :

$$T_n = H_n \setminus H_{n-1}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(H_n) - \mathbb{P}(H_{n-1}) = 1 - q_n - (1 - q_{n-1}) = q_{n-1} - q_n.$$

En utilisant l'expression de q_n trouvée à la question précédente il vient donc

$$\mathbb{P}(T_n) = \frac{q_0}{2^{n-1}} - \frac{q_0}{2^n} = \frac{q_0}{2^n}.$$

- (c) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = S_n = q_0 \times \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$.

La formule est vraie au rang $n = 0$ car les deux termes donnés sont alors nuls. Supposons la formule vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)\mathbb{P}(T_{n+1}) = q_0 \times \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + (n+1)\frac{q_0}{2^{n+1}} \\ &= q_0 \times \left(2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= q_0 \times \left(2 - \frac{2n+4 - (n+1)}{2^{n+1}}\right) \\ &= q_0 \times \left(2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par croissances comparées on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{2^n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2q_0$.

Cette limite représente le nombre moyen de générations avant disparition du caractère hétérozygote. Lorsque $q_0 = 1$ (c'est-à-dire pour un individu de départ hétérozygote), il faut donc attendre en moyenne 2 générations pour obtenir une lignée homozygote.

Exercice 3 (Introduction aux hyperplans).

1. (a) Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0\}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x, y, z) \in F \iff z = -2x - 3y$$

donc

$$(x, y, z) \in F \iff (x, y, z) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -3).$$

Ainsi

$$F = \text{Vect}((1, 0, -2), (0, 1, -3)).$$

Les vecteurs $(1, 0, -2)$ et $(0, 1, -3)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de F . Ainsi

$$\dim(F) = 2.$$

Or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc F est un hyperplan de \mathbb{R}^3 .

(b) Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Ainsi

$$\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cette famille est libre, donc c'est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3.$$

Or $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, donc $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Supposons par exemple que $a_1 \neq 0$ et posons

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$x \in H \iff x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1}x_n.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \left(-\frac{a_2}{a_1}x_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1}x_n, x_2, x_3, \dots, x_n \right) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}(u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$$

où $u_k = -\frac{a_k}{a_1}e_1 + e_k$ avec (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

Donc H est engendré par (u_2, \dots, u_n) vecteurs. De plus, cette famille est libre car si $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vérifient $\lambda_2u_2 + \lambda_3u_3 + \dots + \lambda_nu_n = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors en regardant la coordonnée selon u_2 on obtient $\lambda_2 = 0$, celle selon u_3 fournit $\lambda_3 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à celle selon u_n qui donne $\lambda_n = 0$.

Ainsi

$$\dim(H) = n - 1.$$

Donc H est un hyperplan de \mathbb{R}^n .

2. (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset F$.
Comme H est un hyperplan de E ,

$$\dim(H) = n - 1.$$

Or $H \subset F \subset E$, donc

$$n - 1 \leq \dim(F) \leq n.$$

Ainsi $\dim(F) = n - 1$ ou $\dim(F) = n$.

- Si $\dim(F) = n - 1$, alors $\dim(F) = \dim(H)$ et $H \subset F$, donc $F = H$.
- Si $\dim(F) = n$, alors $F = E$.

Ainsi $\boxed{F = H \text{ ou } F = E.}$

- (b) Posons

$$F = \text{Vect}(h_1, \dots, h_{n-1}, w).$$

Comme $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$, on a

$$H \subset F.$$

De plus $w \in F$ et $w \notin H$, donc $F \neq H$.

D'après la question précédente, on en déduit que $F = E$.

Ainsi (h_1, \dots, h_{n-1}, w) est une famille génératrice de E .

Cette famille possède n vecteurs dans un espace de dimension n , donc c'est une base de E .

Ainsi $\boxed{(h_1, \dots, h_{n-1}, w) \text{ est une base de } E.}$

- (c) Soit $u \in E$.

Comme (h_1, \dots, h_{n-1}, w) est une base de E , il existe un unique

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu) \in \mathbb{R}^n$$

tel que

$$u = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \mu w.$$

Posons

$$v = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1}.$$

Comme $H = \text{Vect}(h_1, \dots, h_{n-1})$, on a $v \in H$, et

$$u = v + \mu w.$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme $e_k \in \mathbb{R}^n$, la question précédente montre qu'il existe $(v, \lambda_k) \in H \times \mathbb{R}$ tel que

$$e_k = v + \lambda_k w.$$

Ainsi

$$e_k - \lambda_k w = v \in H.$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ il existe } \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tel que } e_k - \lambda_k w \in H.}$

(b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Donc

$$x - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)w = \sum_{k=1}^n x_k (e_k - \lambda_k w).$$

Or pour tout k , $e_k - \lambda_k w \in H$, donc comme H est un sous-espace vectoriel,

$$x - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)w \in H.$$

Supposons maintenant que $x \in H$. Alors

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)w = x - (x - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)w).$$

Le membre de droite appartient à H , donc

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)w \in H.$$

Or $w \notin H$, donc nécessairement

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Réciproquement, si

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0,$$

alors

$$x = x - (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)w \in H.$$

Ainsi

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0\}.$$

(c) D'après la question précédente, il existe

$$a = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

tels que

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\},$$

$$H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0\}.$$

Comme H_1 et H_2 sont des hyperplans, ils sont différents de \mathbb{R}^n donc $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $b \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. De plus, comme $H_1 \neq H_2$, les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires.

Ainsi le système linéaire

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0 \end{cases}$$

est constitué de deux lignes non nulles et non multiples l'une de l'autre. Il est donc de rang 2. Comme il y a n variables en jeu cela implique que l'ensemble de ses solutions est de dimension $n - 2$.

Finalement,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2.$$