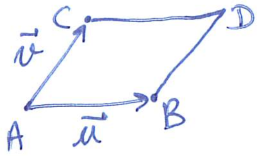
D 19

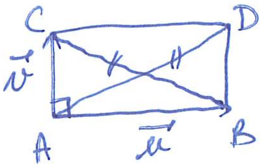
exo 3 : 1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.(-\vec{v})+\|-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$



Si $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$ alors dans le parallélogramme ABDC on a $\vec{u}+\vec{v}=\vec{AD}$ et $\vec{u}-\vec{v}=\vec{CB}$. Ainsi $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$ donne $AD^2+BC^2=AB^2+BD^2+DC^2+AC^2$: la somme des carrés des longueurs des diagonales vaut la somme des longueurs des carrés des 4 côtés (c'est l'"identité du parallélogramme").

2) Comme $\|\vec{u}+\vec{v}\|\geqslant 0$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|\geqslant 0$ on a :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\| \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \iff \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$
$$\iff \vec{u}.\vec{v}=0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}.$$



Avec les m̂ notations que dans le 1), on a donc $AD=BC \iff \vec{AB}\perp\vec{AC}$: un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de m̂ longueur.

exo 4 : 1) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}_\theta.\vec{v}_\theta=-\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=0 \text{ donc } \vec{u}_\theta\perp\vec{v}_\theta \\ \|\vec{u}_\theta\|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1=\|\vec{v}_\theta\|\end{array}\right\}$ donc $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ BON

2) Soit $\vec{u}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ sont les nombres x et y tels que $x\vec{u}_\theta+y\vec{v}_\theta=\vec{u}$ càd $\begin{cases}x\cos\theta-y\sin\theta=a\\ x\sin\theta+y\cos\theta=b\end{cases}$ càd $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ avec $M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Comme $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ est une base, on sait que la matrice M est inversible et que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. On calcule $M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (car $\det(M)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$). Ainsi les coordonnées de $\vec{u}_1$ dans la base $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ sont $\begin{pmatrix}x_{1,\theta}\\y_{1,\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+3\sin\theta\\ -\sin\theta+3\cos\theta\end{pmatrix}$. De même : $\begin{pmatrix}x_{2,\theta}\\y_{2,\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cos\theta+\sin\theta\\ 2\sin\theta+\cos\theta\end{pmatrix}$

3) $$x_{1,\theta}y_{1,\theta}+x_{2,\theta}y_{2,\theta}=(\cos\theta+3\sin\theta)(-2\cos\theta+\sin\theta)+(-\sin\theta+3\cos\theta)(2\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=-2\cos^2\theta-5\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta-2\sin^2\theta+5\cos\theta\sin\theta+3\cos^2\theta$$
$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

là où $\vec{u}_1.\vec{u}_2=(1,3).(-2,1)=-2+3=1$

n.b : Comme $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ est une BON on pouvait aussi utiliser que $x_{1,\theta}=\vec{u}_1.\vec{u}_\theta=1\cos\theta+3\sin\theta$ et $y_{1,\theta}=\vec{u}_1.\vec{v}_\theta=1(-\sin\theta)+3\cos\theta$