Calcul approché d'intégrales et révisions sur les listes — TP20

Exercice 1 — Méthode des rectangles

On a vu en cours qu'on peut approcher la valeur d'une intégrale par la méthode des rectangles : on construit alors les sommes de Riemann d'une fonction.

Q1 *(Rappel du cours de mathématiques à compléter.)* Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, les sommes des Riemann de f à gauche et à droite sont

$$R_{n,g}(f) = \dots \qquad \text{et } R_{n,d}(f) = \dots \qquad \text{et on a : } \lim_{n\to+\infty} R_{n,d}(f) = \lim_{n\to+\infty} R_{n,g}(f) = \dots$$

De manière plus générale, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$R_{n,g}(f) = \dots \qquad \text{et } R_{n,d}(f) = \dots \qquad \text{et on a : } \lim_{n\to+\infty} R_{n,d}(f) = \lim_{n\to+\infty} R_{n,g}(f) = \dots$$

Q2 En utilisant une somme de Riemann, déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$. Vérifier votre résultat.

Q3 En utilisant une somme de Riemann, déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{x+1}\,dx$. Vérifier votre résultat.

Q4 Écrire une fonction `approx` prenant en argument $x > 0$ et renvoyant une valeur approchée de $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ en utilisant une somme de Riemann. Quelle est la valeur exacte de $I(x)$? Tracer alors les graphes des fonctions `approx` et I sur le même graphe. On fera varier les abscisses de 1 à 10 avec 100 points de tracé (on pourra définir la liste des abscisses à la main, ou en utilisant la fonction `linspace` de la bibliothèque `numpy`).

Exercice 2 — Révisions sur les listes

Faire les exercices du TP de révision proposé ci-après.

Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C- Madame MOREL

TP 5
LISTES

I. Création de listes

N'oubliez pas de tester vos fonctions sur plusieurs listes différentes !

Exercice 1 On se donne une liste `L` de longueur 10.

1. Créer la liste des 4 derniers éléments de `L`
2. Créer la liste constituée des 3 premiers éléments de `L` et des 2 derniers.
3. Créer la liste constituée des éléments de `L` sauf des 4 premiers et des 3 derniers.

Exercice 2 (série harmonique)
On considère la suite (S_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, , \, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, .$$

Écrire une fonction qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite (S_n).

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 0 \, , \, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \, .$$

Écrire une fonction qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 4 On lance un dé équilibré dix fois. Écrire une fonction qui renvoie la liste des lancers successifs du dé.

Exercice 5 : Écrire une fonction `echange(L)` qui prend en argument une liste `L`, qui échange les premier et dernier éléments de `L`, et qui renvoie la nouvelle liste ainsi obtenue.

Exercice 6 : Écrire une fonction `enleverdernier(L)` qui enlève le dernier élément de la liste `L` et qui renvoie la nouvelle liste ainsi obtenue.
Tester sur les listes `[1,2,7,10,20]` et `[1,2,20,7,10,20]`

Exercice 7 Écrire une fonction `python` qui prend en argument une liste de nombres `L` et qui renvoie une liste avec

1. les termes pairs de `L`
2. les termes d'indices pairs de `L`

II. Somme des éléments d'une liste – fonction `sum`

Exercice 8 :

1. Que fait le programme suivant ?

```
sum ([k**2 for k in range(1,12)])
```

2. Écrire une fonction Python qui , pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calcule $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$, en utilisant `sum()`

Exercice 9 :

1. Créer la liste L des inverses de tous les carrés des nombres entiers compris entre 1 et 1 000 000.
2. En utilisant `sum`, calculer la somme S de la liste L puis donner la valeur de la racine carrée de 6 * S.
3. Quelle valeur peut-on conjecturer pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$? (en cas de convergence)

III. Parcours complet / incomplet d'une liste – indices ou éléments ?

Exercice 10 : Soit `L` une liste de nombres de longueur `N`. Écrire une fonction **moyenne** qui renvoie la moyenne de ses éléments . *on rappelle que la moyenne est donnée par :* $\mu = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{x\in L} x$

Exercice 11 : Soit `L` une liste de nombres de longueur `N`. La variance étant donnée par : $V(T) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{x\in L} (x-\mu)^2$, écrire une fonction `ecarttype` qui renvoie l'écart-type de `L`, c'est-à-dire la racine de sa variance.

Exercice 12 :
Écrire une fonction `remplace(L)` d'argument une liste de nombres `L` qui remplace tous les 0 qu'elle contient par des 1.

Exercice 13 :
Écrire une fonction `nombre(L,a)` de paramètres `L` une liste et `a` une variable, qui renvoie le nombre de `a` que contient `L`.

Exercice 14 :
Écrire une fonction `recherchemax(L)` de paramètre une liste de nombres `L`, qui renvoie le maximum des éléments de `L`.

Exercice 15 Écrire une fonction `position(L,a)` de paramètres `L` une liste et `a` une variable, qui renvoie:

- `introuvable` si `a` n'est pas dans la liste.
- la (première) position de `a` s'il y est (plusieurs fois).

Exercice 16 Écrire une fonction `estcroissante(L)` qui teste si une liste de nombres `L` est croissante.