Exercice 1
Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y, -y) \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,x,x,x) \end{array}$

Exercice 2
Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+1, y-z) \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$

Exercice 3
Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 1+xy \end{array}$

2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x+3y, -z) \end{array}$

3. $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+b-2c+3d \end{array}$

4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée.

5. $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$

Exercice 4
Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x \end{array}$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que les f_a sont les seuls éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 5
Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leurs noyaux. Sont-elles injectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+z) \end{array}$

2. $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Exercice 6
Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y, x+z) \end{array}$

2. $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x+y-z.$$

1. Montrer que f est une forme linéaire.
2. Déterminer le noyau de f. De quel objet géométrique s'agit-il ?
3. Quelle est la dimension de $Ker(f)$?

Exercice 8
On considère l'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) \end{array}$$

1. Montrer que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $p \circ p = p$.
3. En déduire l'expression de p^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9
Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$
   (b) On suppose de plus que f et g commutent c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g)) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
   (b) On suppose de plus que f et g commutent c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 10
Soient E, F et G trois espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g).$$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application donnée par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, -x-y, -2y+3z).$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 12
On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & : & (x,y,z) & \longmapsto & (-x+z, y-z, 2x+y-2z) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & : & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+z, 2x-y+z) \end{array}$$

1. Montrer que $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 13
1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(x,y,z) = (x-y, x+z, x-y+z, x).$$

Déterminer la dimension du noyau de f. En déduire le rang de f. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2. Soit $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \ g(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x-y-z+t).$$

Déterminer le rang de g. En déduire la dimension de $Ker(g)$. La fonction g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3. Soient $h_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5)$, $h_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7, \mathbb{R}^4)$ et $h_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Compléter chacune des cases du tableau suivant avec : “oui”, “non” ou “on ne peut pas savoir”.

La fonction \ est	injective	surjective	bijective
h_1			
h_2			
h_3			

Exercice 14
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ f(x,y,z) = (5x-2y+z, 7x-3y+2z, 2x-2y+2z).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (0,1,2)$ et $u_3 = (-1,-2,0)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.
2. Déterminer les matrices A, B, C et D suivantes :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad , \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \quad , \quad C = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad , \quad D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

Exercice 15
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+4y+2z, -3y-2z, 4y+3z).$$

Soient $u_1 = (1,-1,1),\ u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u_2, u_3, u_1)$.

Exercice 16
Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Combien valent n et p ?
2. Déterminer l'expression de $g(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. (i.e. une expression similaire à celle donnée pour f dans l'exercice précédent).
3. Soient $u_1 = (1,-1)$, $u_2 = (1,1)$, $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,-1,-1)$ et $v_3 = (1,1,1)$. Justifer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ forment des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 17
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
Soient aussi $u_1 = (1,-2)$ et $u_2 = (2,-2)$.

1. Déterminer l'expression de $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice $\Delta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
5. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
6. Vérifier que $A = P\Delta P^{-1}$.
7. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. En déduire l'expression de $f^n(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 18
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $Im(f)$.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$.
4. En déduire que $f^2 = 0$.
5. Sans calculer le produit matriciel, que vaut alors M^n pour $n \geq 2$?

Exercice 19
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Déterminer l'expression de $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. f est-elle bijective ? Si oui, donner l'expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On s'appuiera sur un résultat du cours.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $B_\lambda = A - \lambda I_2$.

3. Démontrer que B_λ est inversible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
4. Soient $u = (2,1)$ et $v = (-1,2)$. Montrer que $u \in \mathrm{Ker}(B_1)$ et $v \in \mathrm{Ker}(B_{-1})$.
5. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Déterminer la matrice de f dans cette base.
7. Représenter les vecteurs u, v, $f(u)$ et $f(v)$ dans le plan. En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.