

# Programme de colles : semaine 27, du 25/5 au 29/5

*Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.*

## 1 Géométrie du plan et de l'espace

*Les équations de cercles ont été vues uniquement à travers un exercice. Le projeté orthogonal et la démonstration des inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz ont été abordés en exercice.*

- notion de vecteur et de base :
  - repérage d'un point/d'un vecteur par ses coordonnées
  - combinaisons linéaires, relation de Chasles
  - colinéarité, coplanarité
  - bases du plan  $\mathbb{R}^2$  et de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , coordonnées d'un vecteur dans une base
  - déterminant de 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^2$
  - $u$  et  $v$  sont colinéaires ssi  $\det(u, v) = 0$
- produit scalaire et orthogonalité :
  - définition du produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  à partir des coordonnées dans la base canonique
  - bilinéarité, symétrie, caractère défini positif du produit scalaire
  - orthogonalité, norme, propriétés élémentaires. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, identité  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ , théorème de Pythagore.
  - une famille de vecteurs non nuls orthogonaux et de bon cardinal forme une base (*ce résultat a été admis*), base orthonormée
  - les formules donnant le produit scalaire et le déterminant en fonction des coordonnées sont valables lorsque les coordonnées sont données dans une base orthonormée (*ce résultat a été admis*)
- droites et plans :
  - équation paramétrique d'une droite du plan ou de l'espace (resp. d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur directeur (resp. d'un couple de vecteurs directeurs)

- équation cartésienne d'une droite du plan (ou d'un plan de l'espace) à l'aide d'un vecteur normal
- savoir passer de l'équation cartésienne à l'équation paramétrique et inversement
- système d'équations cartésienne d'une droite de l'espace. Exemples d'intersections de plans

## 2 Applications linéaires

*On travaille le plus souvent avec  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ , mais des exemples dans  $M_n(\mathbb{R})$  ont aussi été présentés en classe. **Attention** : aucun exemple dans  $\mathbb{R}_n[X]$  n'a été présenté en classe.*

**Attention** : nous n'avons pas encore fait d'exercices sur la notion de matrice d'une application linéaire, mais on pourra s'assurer que les élèves savent la déterminer pour un exemple simple.

- définition de la linéarité, proposition : si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $f(0_E) = 0_F$
- savoir montrer qu'une application est ou n'est pas linéaire
- opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composition, puissances (si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $k$  fois) avec la convention  $f^0 = Id_E$ ), bijection réciproque
- vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- noyau d'une application linéaire. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $\text{Ker}(f)$  est un s.e.v de  $E$ .  $f$  est injective ssi  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$
- image d'une application linéaire. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $\text{Im}(f)$  est un s.e.v de  $F$ .  $f$  est surjective ssi  $\text{Im}(f) = F$
- si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  et si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$

- rang d'une application linéaire :  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f(u_1), \dots, f(u_n))$  où  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de l'espace de départ de  $f$
- théorème du rang (*ce résultat a été admis*). Application : si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $\dim(E) = n$  et  $\dim(F) = p$  alors :
  - $f$  est surjective ssi  $\text{rg}(f) = p$
  - $f$  est injective ssi  $\text{rg}(f) = n$
  - $f$  est bijective ssi  $\text{rg}(f) = n = p$
 En particulier, si  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors  $f$  est surjective ssi  $f$  est injective ssi  $f$  est bijective.
- matrice d'une application linéaire : savoir déterminer la matrice d'une application li-

néaire dans des bases données, et inversement déterminer une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases

- une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ

### 3 Informatique en langage Python

Résolution approchée d'équations différentielles par la méthode d'Euler. *La méthode d'Euler n'est pas à connaître par les élèves, mais elle peut être rappelée et utilisée dans les exercices.*

## 4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition du déterminant de deux vecteurs  $u$  et  $v$  du plan exprimés dans la base canonique. Compléter ensuite la propriété suivante :  $\det(u, v) \neq 0 \iff$  la famille  $(u, v)$  est ...
2. Donner la définition du produit scalaire et de la norme dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .
3. En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrer que pour tous vecteurs  $u, v$  on a :  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$ , puis en déduire le théorème de Pythagore.
4. Donner la définition d'une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  et vérifier qu'une famille de vecteurs choisie par l'examineur est une telle base.
5. Déterminer une équation cartésienne d'une droite du plan dont l'examineur donne la représentation graphique, et, inversement, dessiner une droite du plan dont l'examineur donne une équation cartésienne.
6. Soient  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Laquelle des composées  $g \circ f$  et  $f \circ g$  existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
7. Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Donner la définition de  $\text{Ker}(f)$  puis donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\text{Ker}(f)$  pour que  $f$  soit injective.
8. Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Donner la définition de  $\text{Im}(f)$  puis donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\text{Im}(f)$  pour que  $f$  soit surjective.
9. Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Rappeler la définition de  $\text{Ker}(f)$  (resp. de  $\text{Im}(f)$ ) puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de  $E$  (resp. de  $F$ ).
10. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.

*Pas de question de calcul de remédiation cette semaine. En revanche, toutes les colles devront comporter une question demandant de démontrer qu'une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  choisie par l'examineur (avec  $n, p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ) est linéaire.*

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.