

Programme de colles : semaine 28, du 1/6 au 5/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications linéaires

*On travaille le plus souvent avec $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, mais des exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont aussi été présentés en classe. **Attention : aucun exemple dans $\mathbb{R}_n[X]$ n'a été présenté en classe.***

- définition de la linéarité, proposition : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(0_E) = 0_F$
- savoir montrer qu'une application est ou n'est pas linéaire
- opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composition, puissances (si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k fois) avec la convention $f^0 = Id_E$), bijection réciproque
- vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- noyau d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $Ker(f)$ est un s.e.v de E . f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$
- image d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $Im(f)$ est un s.e.v de F . f est surjective ssi $Im(f) = F$
- si (u_1, \dots, u_n) est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $Im(f) = Vect(f(u_1), \dots, f(u_n))$
- rang d'une application linéaire : $rg(f) = \dim(Im(f)) = rg(f(u_1), \dots, f(u_n))$ où (u_1, \dots, u_n) est une base de l'espace de départ de f
- théorème du rang (*ce résultat a été admis*). Application : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$ alors :
 - f est surjective ssi $rg(f) = p$
 - f est injective ssi $rg(f) = n$
 - f est bijective ssi $rg(f) = n = p$

En particulier, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.

- matrice d'une application linéaire : savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données, et inversement déterminer une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases
- une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ
- si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, correspondance entre l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$
 où A est la matrice de f dans des bases fixées.
- matrices d'une combinaison linéaire, d'une composée (d'une puissance) d'applications linéaires, d'une bijection réciproque
- si A est une matrice de f dans des bases quelconques alors $rg(f) = rg(A)$
- Calcul du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire en utilisant sa matrice

2 Polynômes réels

On évitera les exercices trop abstraits. Sont hors programme en BCPST 1ère année : le théorème de d'Alembert Gauss, la division euclidienne de polynômes, la factorisation en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Attention : nous n'avons pas encore abordé le lien entre racines, divisibilité et factorisation.

- on appelle polynôme toute fonction polynomiale, on note X la fonction $x \mapsto x$
- unicité des coefficients
- opérations : somme, produit, composition, dérivées successives
- degré. Par convention, $\deg(0) = -\infty$. Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée.
- notations $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$

3 Informatique en langage Python

Pas d'informatique cette semaine.

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Laquelle des composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
2. Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Ker}(f)$ pour que f soit injective.
3. Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $\text{Im}(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Im}(f)$ pour que f soit surjective.
4. Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$ (resp. de $\text{Im}(f)$) puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E (resp. de F).
5. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.
6. En vous appuyant sur le théorème du rang, expliquer pourquoi si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie, on a : f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.
7. Donner la définition du degré d'un polynôme et énoncer la formule donnant le degré d'un produit.
8. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?

Pas de question de calcul de remédiation cette semaine. En revanche, toutes les colles devront comporter une question demandant de démontrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ choisie par l'examinateur (avec $n, p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$) est linéaire et d'en déterminer la matrice dans les bases canoniques.

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.