Programme de colles : semaine 29, du 8/6 au 12/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications linéaires

Reprise du programme précédent.

2 Polynômes réels

On évitera les exercices trop abstraits. Sont hors programme en BCPST 1ère année : le théorème de d'Alembert Gauss, la division euclidienne de polynômes, la factorisation en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- *on appelle polynôme toute fonction polynomiale, on note X la fonction $x \longmapsto x$*
- unicité des coefficients
- opérations : somme, produit, composition, dérivées successives
- degré. Par convention, $\deg(0) = -\infty$. Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée.
- notations $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- divisibilité et racines. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : α est racine de P ssi $X - \alpha$ divise P $(*)$
- un polynôme de degré n admet au plus n racines, seul le polynôme nul admet une infinité de racines.
- racines multiples, ordre de multiplicité. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : α est racine multiple de P ssi $(X-\alpha)^2$ divise P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. *La caractérisation de l'ordre de multiplicité via les dérivées n'est pas un attendu du programme de BCPST.*
- factorisation de polynômes de petit degré en utilisant des racines évidentes.

3 Équations différentielles linéaires

- théorème de structure de l'ensemble des solutions (solution particulière + solutions de l'équation homogène)
- cas des équations du premier et du deuxième ordres à coefficients constants
- méthode de variation de la constante
- cas d'un second membre non constant : recherche d'une solution particulière “de la même forme” que le second membre. *Dans cette situation, on indiquera le plus souvent aux élèves sous quelle forme chercher une solution particulière.*
- problèmes de Cauchy

4 Informatique en langage Python

Révisions.

5 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.
2. En vous appuyant sur le théorème du rang, expliquer pourquoi si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie, on a : f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ f bijective.
3. Donner la définition du degré d'un polynôme et énoncer la formule donnant le degré d'un produit.
4. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
5. Énoncer le théorème faisant le lien entre racine d'un polynôme et factorisation. *On attend le théorème* $(*)$ *et on s'assurera que les élèves connaissent la définition de "racine" et de "divise".*
6. Factoriser un polynôme de degré 3 ou 4 en utilisant une ou des racines évidentes. *Note aux colleurs : on proposera uniquement des polynômes scindés sur* $\mathbb{R}$.
7. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ou du deuxième ordre à coefficients constants choisie par l'examinateur.
8. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre choisie par l'examinateur en utilisant la méthode de variation de la constante.

Pas de question de calcul de remédiation cette semaine. En revanche, toutes les colles devront comporter une question demandant de démontrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *choisie par l'examinateur (avec* $n, p \in [\![1, 4]\!]$*) est linéaire et d'en déterminer la matrice dans les bases canoniques.*

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.