Mathématiques - mercredi 10 juin 2026
Devoir n°8 Durée : 2 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet comporte 1 page et est constitué de 3 exercices et d'une devinette.**

Exercice 1 (une équation d'ordre 3)**.**
Dans cet exercice, on s'intéresse à une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants. Plus précisément, on cherche à résoudre le problème de Cauchy $(\mathcal{PC})$ suivant :

$$(\mathcal{PC}) \ : \ \begin{cases} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 0 \ ; \ y''(0) = 2. \end{cases}$$

On admet que ce problème a une unique solution. On note (E) l'équation différentielle $y'''+2y''-y'-2y = 0$, $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ le polynôme associé et enfin, pour $r \in \mathbb{R}$, on note $f_r : x \longmapsto e^{rx}$.

1. Démontrer que f_r est solution de (E) si et seulement si r est racine de P.
2. Factoriser le polynôme P.
3. En déduire trois valeurs $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ telles que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ la fonction $af_{r_1} + bf_{r_2} + cf_{r_3}$ est solution de (E).
4. Déterminer alors la solution du problème $(\mathcal{PC})$.

Exercice 2 (un endomorphisme nilpotent)**.**
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ f(x, y, z) = (-x + y, -x + z, -x + z).$$

1. Déterminer le noyau de f, on en précisera une base et la dimension.
2. Déterminer l'expression de $f^2(x, y, z)$ puis de $f^3(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire les dimensions de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et de $\mathrm{Ker}(f^3)$.

Dans la suite de l'exercice, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$.

4. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. Calculer A^2 et A^3 et retrouver le résultat de la question 3.

Exercice 3 (d'après Agro-Véto 2025)**.**
Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (1 - t)^q \, dt$.

1. En effectuant un changement de variables simple, montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on a $I_{p,q} = I_{q,p}$.
2. Calculer $I_{p,0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. En effectuant une intégration par parties, montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on a $I_{p+1,q} = \dfrac{p + 1}{q + 1} I_{p,q+1}$.
4. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $\forall q \in \mathbb{N}, \ I_{p,q} = \dfrac{p! \, q!}{(p + q + 1)!}$.

Devinette (cette question ne fait pas partie du devoir et ne sera pas notée)**.**
Monsieur Ducallia a choisi un polynôme $P \in \mathbb{N}[X]$, c'est-à-dire un polynôme dont tous les coefficients sont des entiers naturels. Vous pouvez lui poser exactement deux questions. Chaque question consiste à choisir un réel x et à lui demander la valeur de $P(x)$. Après avoir reçu les réponses à ces deux questions, vous devez être en mesure de déterminer tous les coefficients de P. Quelles deux valeurs de x choisissez-vous et comment retrouver le polynôme P à partir des réponses de M. Ducallia ?