# DS 8 - Corrigé

## Exercice 1 :

1) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_r'(x) = re^{rx}$, $f_r''(x) = r^2 e^{rx}$ et $f_r'''(x) = r^3 e^{rx}$.
Ainsi $f_r$ est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f_r'''(x) + 2f_r''(x) - f_r'(x) - 2f_r(x) = 0$$

$\iff r^3 e^{rx} + 2r^2 e^{rx} - re^{rx} - 2e^{rx} = 0$

$\iff (r^3 + 2r^2 - r - 2)e^{rx} = 0$

$\iff P(r)e^{rx} = 0$

$\iff P(r) = 0$

$\iff$ $r$ est racine de $P$

2) On remarque que $P(1) = 1^3 + 2\times 1^2 - 1 - 2 = 0$ donc $1$ est racine de $P$.
Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)(X-1)$.
Nécessairement, $\deg(Q) = \deg(P) - \deg(X-1) = 3 - 1 = 2$ donc il existe
$a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Dès lors :

$$P(X) = Q(X)(X-1) \iff X^3 + 2X^2 - X - 2 = (aX^2 + bX + c)(X-1)$$

$$\iff X^3 + 2X^2 - X - 2 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ c - b = -1 \\ -c = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Donc $Q(X) = X^2 + 3X + 2$. On peut alors remarquer que
$(X+1)(X+2) = X^2 + X + 2X + 2 = Q(X)$ et finalement $\boxed{P(X) = (X-1)(X+1)(X+2)}$

3) Les racines de $P$ sont donc $\boxed{r_1 = 1,\ r_2 = -1 \text{ et } r_3 = -2}$ D'après la question 1, les fonctions $f_1$, $f_{-1}$ et $f_{-2}$ sont donc solutions de (E). Dès lors d'après le principe de superposition, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ les fonctions

$f = af_1 + bf_{-1} + cf_{-2}$ sont encore solution de (E) puisque :

$$f''' + 2f'' - f' - 2f = a(f_1''' + 2f_1'' - f_1' - 2f_1) + b(f_{-1}''' + 2f_{-1}'' - f_{-1}' - 2f_{-1})$$
$$+ c(f_{-2}''' + 2f_{-2}'' - f_{-2}'' - 2f_{-2})$$
$$= a \times 0 + b \times 0 + c \times 0$$
$$= 0.$$

4) Reste alors à déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f = af_1 + bf_{-1} + cf_{-2}$ satisfasse les conditions initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ae^{x} + be^{-x} + ce^{-2x}$ donc $f(0) = a + b + c$

$f'(x) = ae^{x} - be^{-x} - 2ce^{-2x}$ donc $f'(0) = a - b - 2c$

$f''(x) = ae^{x} + be^{-x} + 4ce^{-2x}$ donc $f''(0) = a + b + 4c$

Ainsi $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c = 1 \\ a-b-2c = 0 \\ a+b+4c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c = 1 \\ -2b-3c = -1 \; (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 3c = 1 \; (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a+b+\frac{1}{3} = 1 \\ -2b-1 = -1 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$

Finalement, la solution du problème (Pc) est donc

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{2}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-2x}}$$

Exercice 2

1) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$$
$$\iff \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$$
$$\iff x=y=z$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(x,x,x),\ x \in \mathbb{R}\}} = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

Comme $(1,1,1) \neq (0,0,0)$, $\boxed{((1,1,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$

et $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1}$.

2) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$f^2(x,y,z) = (f \circ f)(x,y,z) = f(f(x,y,z))$$
$$= f(-x+y, -x+z, -x+z)$$
$$= (-(-x+y)+(-x+z), -(-x+y)+(-x+z), -(-x+y)+(-x+z))$$
$$= \boxed{(z-y, z-y, z-y)}$$

$$f^3(x,y,z) = f(f^2(x,y,z)) = f(z-y, z-y, z-y)$$
$$= (-(z-y)+z-y, -(z-y)+z-y, -(z-y)+z-y)$$
$$= \boxed{(0,0,0)}$$

3) Ainsi $\mathrm{Ker}(f^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-y=0\}$

$$= \{(x,y,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}((1,0,0), (0,1,1))$$

Comme $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas colinéaires, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2}$.

Et comme $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ on a $\mathrm{Ker}(f^3) = \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^3)) = 3}$.

3/6

4) On calcule que
$$\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{car } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T))$$
$$= 3$$

Comme cette famille compte 3 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ cela implique que $\boxed{\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

5) On calcule $f(u_1) = f(1,1,1) = (-1+1, -1+1, -1+1) = (0,0,0) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$

$f(u_2) = f(0,1,1) = (1,1,1) = u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$

$f(u_3) = f(0,0,1) = (0,1,1) = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3$

Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

6) On calcule que $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = 0_3}$

On retrouve donc que

- $\mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ donc, d'après le théorème du rang,

$\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = \underline{\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2}$.

- $A^3 = 0_3$ donc $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc $\underline{\dim(\mathrm{Ker}(f^3)) = 3}$.

Exercice 3 :

1) Posons $\boxed{s = 1-t}$, alors $ds = -dt$ et $\begin{cases} t=0 \Leftrightarrow s=1 \\ t=1 \Leftrightarrow s=0 \end{cases}$.

De plus $t^p(1-t)^q dt = -(1-s)^p s^q ds$.

Donc, par changement de variables :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \int_1^0 -(1-s)^p s^q ds = \int_0^1 s^q(1-s)^p ds = \underline{I_{q,p}}$$

2) Pour $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_{p,0} = \int_0^1 t^p(1-t)^0 dt = \int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^p}{p+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{p+1}}$$

3) Posons $u(t) = t^{p+1}$ et $v(t) = -\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}$

Alors $u'(t) = (p+1)t^p$ $v'(t) = (1-t)^q$

Comme $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a par intégration par parties :

$$I_{p+1,q} = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^q dt = \left[-\frac{t^{p+1}(1-t)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (p+1)t^p \times \left(-\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}\right) dt$$

$$= 0 + \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 t^p \times (1-t)^{q+1} dt$$

$$= \boxed{\frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}}$$

4) Procédons par récurrence pour prouver pour tout $p \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(p) : \ \forall q \in \mathbb{N}, \ I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

Tout d'abord pour $p=0$, on a pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$I_{0,q} = I_{q,0}$ (grâce à la question 1)

$= \frac{1}{q+1}$ (grâce à la question 2)

$= \frac{0!\,q!}{(q+1)!}$ donc la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons ensuite que pour un certain $p \in \mathbb{N}$ on a : $\forall q \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$,
alors pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1} \quad \text{(question 3))}$$

$$= \frac{p+1}{q+1} \times \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1+1)!} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

$$= (p+1) \times p! \times \frac{(q+1)!}{q+1} \times \frac{1}{(p+q+2)!}$$

$$= \frac{(p+1)!\,q!}{(p+1+q+1)!}$$

donc la propriété $P(p+1)$ est vraie.

Finalement, par récurrence on a bien : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$