

**Exercice 1** Des()espérances

- Q1** Écrire une fonction simulant une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
- Q2** En déduire une fonction simulant la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- Q3** En utilisant la fonction précédente, estimer l'espérance et la variance de X . On vérifiera avec les valeurs exactes (qui doivent être connues).
- Q4** Pour $a < b$ deux entiers, écrire une fonction simulant la valeur d'une variable aléatoire Y suivant une loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
- Q5** En utilisant la fonction précédente, estimer l'espérance et la variance de Y . On vérifiera avec les valeurs exactes dans le cas $a = 1$ et $b = n$ (la valeur de l'espérance doit être connue, celle pour la variance non : on a $V(Y) = (n^2 - 1)/12$).

Exercice 2 Tracé d'histogramme

- Q1** Écrire une fonction simulant une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(10, \frac{2}{5})$.
- Q2** Créer une liste `L` contenant 10 000 réalisations de X .
- Q3** Créer une liste `repartition` telle que `repartition[i]` contienne la proportion d'éléments de `L` égaux à i . En d'autres termes, de quoi `repartition[i]` est-il une approximation ?
- Q4** Afficher alors l'histogramme de la loi de X c'est-à-dire le graphe donnant $\mathbb{P}(X = i)$ en fonction de i .

On considère une population de $5N$ individus dont 2 cinquièmes a un gène g donné. On choisit 10 personnes distinctes dans la population et on appelle X_N le nombre de ces personnes ayant le gène g .

- Q5** Expliquez pourquoi X_N ne suit pas une loi $\mathcal{B}(10, \frac{2}{5})$.
- Q6** Écrire une fonction simulant la variable aléatoire X_N .
- Q7** En suivant la même méthode que pour X , construire l'histogramme de X_N .
- Q8** Afficher les histogrammes de X et de X_N sur le même dessin. Que constate-t-on pour N grand ?

Exercice 3 Simuler à partir de la loi

On rappelle que donner la loi d'une variable aléatoire X peut se faire en donnant le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} X(\Omega) & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline \mathbb{P}(X = \cdot) & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i = \mathbb{P}(X = x_i).$$

- Q1** Écrire un code Python simulant la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :
- $$\begin{array}{c|c|c|c|c} X(\Omega) & -2 & 3 & 4 & 10 \\ \hline \mathbb{P}(X = \cdot) & 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{array}$$

- Q2** Quelles conditions doivent satisfaire les nombres p_i pour avoir une loi de probabilité ? On place les nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ dans une liste `P`. Écrire une fonction prenant `P` en argument et renvoyant `True` si les conditions pour avoir une loi de probabilité sont satisfaites, et `False` sinon.

Dans la suite de l'exercice, on souhaite généraliser la question 1 et écrire une fonction simulant une variable aléatoire X de loi donnée par le tableau $\frac{X(\Omega)}{\mathbb{P}(X = \cdot)} \mid \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$.

Q3 Écrire une fonction prenant en argument la liste $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ et renvoyant la liste $[p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, p_1 + \dots + p_n]$.

Q4 Écrire une fonction prenant en argument un réel t et une liste L de n nombres rangés dans l'ordre croissant et renvoyant :

- 0 si $t < L[0]$
- 1 si $L[0] \leq t < L[1]$
- 2 si $L[1] \leq t < L[2]$
- ...
- $n - 1$ si $L[n-2] \leq t < L[n-1]$
- n si $t \geq L[n-1]$.

Q5 On place les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X dans une liste V , et les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ dans une liste P . En utilisant les fonctions précédentes, écrire une fonction prenant V et P en arguments et simulant la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau au début de l'exercice.

Exercice 4 Mélange

Cet exercice est adapté d'un oral du concours Agro-Véto.

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3. On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant.

À chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose qu'initialement toutes les boules sont dans l'urne A c'est-à-dire que $X_0 = 3$.

Q1 Écrire une fonction prenant en argument une liste L et un nombre a et renvoyant l'indice de a dans L .

Q2 Écrire une fonction simulant la variable X_n . On rappelle qu'on peut utiliser la commande `x in L` renvoyant `True` si x appartient à L et `False` sinon.

Q3 Déterminer à l'aide de l'ordinateur les valeurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = k)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{2n+1} = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Vers quelles lois les suites de variables aléatoires (X_{2n}) et (X_{2n+1}) convergent¹-elles ?

1. La notion de convergence de variable aléatoire sera définie en 2ème année.