

TD 23

exo 7: 1) On doit avoir $\sum_{k=1}^n P(X=k) = 1$ d'où $\alpha \sum_{k=1}^n k = 1$

donc $\alpha \frac{(n+1)n}{2} = 1$ donc $\frac{\alpha(n+1)}{2} = 1$ donc $\alpha = \frac{2}{n+1}$

$$2) E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X=k) = \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

exo 16: 1) $X \hookrightarrow B(n, p)$ ($\oplus$ phrase de justification)

2) $P(Y=k | X=i) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}$ car tout se passe comme si Y suivait une loi $B(n-i, p)$ ($\oplus$ phrase de justification)

$$3) \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-i-k+i)!} \times \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \binom{n}{k} \binom{k}{i}$$

4) $Z(\Omega) = \{0, n\}$ et $\forall k \in \{0, n\}$,

$$P(Z=k) = P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^n P(X=i) \times P(X+Y=k | X=i)$$

FFT dans le SCE $(X=i)$ $0 \leq i \leq n$

$$= \sum_{i=0}^n P(X=i) P(Y=k-i | X=i) \stackrel{\text{q1) et q2)}}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-(k-i)}$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i} \stackrel{\text{q3)}}{=} \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \stackrel{\text{q3)}}{=} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} 1^i$$

car $\binom{k}{i} = 0$ si $i > k$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-2k} (1-p+1)^k$$

$$= \binom{n}{k} (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}$$

Or $q = p(2-p)$ alors
 $1-q = 1-2p+p^2 = (1-p)^2$

donc $P(Z=k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$. Aussi $Z \hookrightarrow B(n, p(2-p))$

(c'est naturel, en fait tout se passe comme si on appelait 2 fois chaque personne et Z compte le nbre de personnes qui décrochent au $\ominus$ une fois, chose dont la proba vaut $1-(1-p)^2 = q$ ($(1-p)^2$ étant la proba de ne pas répondre 2 fois)).

$$4) E(Y) = E(Z-X) = E(Z) - E(X) = nq - np = np(2-p) - np = np(1-p)$$