

ex 12

1) $X(\Omega) = [0, 20]$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} P(X \geq k) &= \sum_{k=1}^{20} P\left(\bigcup_{l=k}^{20} X=l\right) = \sum_{k=1}^{20} \sum_{l=k}^{20} P(X=l) = \sum_{1 \leq k \leq l \leq 20} P(X=l) \\ &= \sum_{l=1}^{20} \sum_{k=1}^l P(X=l) = \sum_{l=1}^{20} l P(X=l) = \sum_{l=0}^{20} l P(X=l) = E(X) \end{aligned}$$

2) Pour $k \in [0, 20]$, l'événement $(X_n \leq k)$ est réalisé lorsque tous les n candidats ont une note inférieure à k . La probabilité qu'un candidat donné ait une note inférieure à k est $\frac{k+1}{21}$ (car il s'agit d'une loi uniforme sur $[0, 20]$). Les notes des candidats étant indépendantes on a: $P(X_n \leq k) = \left(\frac{k+1}{21}\right)^n$ et cette formule fonctionne aussi pour $k=-1$ ($P(X_n \leq -1) = 0$).
Ainsi pour tout $k \in [0, 20]$:

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n \leq k) - P(X_n \leq k-1) \\ &= \frac{(k+1)^n - k^n}{21} \end{aligned}$$

3) $E(X_n) = \sum_{k=1}^{20} P(X_n \geq k)$ d'après 1)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{20} 1 - P(X_n < k) \\ &= 20 - \sum_{k=1}^{20} P(X_n \leq k-1) \\ &= 20 - \left(\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{k}{21}\right)^n \right) \end{aligned}$$

Or pour $k \in [1, 20]$, $\frac{k}{21} \in]-1, 1[$ donc $\left(\frac{k}{21}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 20$ c'est cohérent: *il y a beaucoup de lettres, le maximum des notes est grand.*