

TD 23 exo 13

1) Notons $A = \text{"tirer une autre boule que la 9"}$ et $B = \text{"tirer un coeur ou le roi de pique"}$. Par équiprobabilité, $P(A) = \frac{8}{9}$ et $P(B) = \frac{9}{32}$

Or $(X=1) = (A \cap B)$ et comme le tirage de la boule et de la carte sont indépendants $P(X=1) = P(A)P(B) = \frac{8}{9} \times \frac{9}{32} = \frac{1}{4}$

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 9m\}$ et $P(X=9m) = P(\bar{A}) = \frac{1}{9}$ et donc

$$P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=9m) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{23}{36}$$

La loi de X est donc

$X(\omega)$	0	1	9m
$P(X=.)$	$\frac{23}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

2) Après calcul, $E(X) = \frac{1}{4} + m$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{4} + 9m^2 - (\frac{1}{4} + m)^2 = 8m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{3}{16}$

3) $Y = X - \frac{m}{2}$ donc $E(Y) = E(X) - \frac{m}{2} = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$ et $V(Y) = V(X) = 8m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{3}{16}$

4) Le jeu est à notre avantage si et seulement si $E(Y) \geq 0$ c'est-à-dire $\frac{1}{4} + \frac{m}{2} \geq 0$ ou encore $m \geq -\frac{1}{2}$

5) On veut $V(Y) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$

Après calcul, on trouve $m \in [-\frac{1}{16}, \frac{1}{8}]$.

Pour maximiser notre gain, il faut maximiser $E(Y) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$ sous la condition $m \in [-\frac{1}{16}, \frac{1}{8}]$. Il faut donc prendre $m = \frac{1}{8}$, et dans ce cas $E(Y) = \frac{5}{16}$.