

Questions de cours de colle de l'année 2025-2026

Voici la liste de toutes les questions de cours demandées en colle cette année. *Des questions inédites sont ajoutées pour les chapitres de fin d'année sur lesquels il n'y a pas eu de colle, ainsi qu'en Python ; elles sont signalées en bleu.*

0 Logique

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, écrire des phrases avec des quantificateurs signifiant “la fonction f admet un maximum en 3” et “la fonction f admet un maximum”.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
3. Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.

1 Nombres réels

4. Compléter et illustrer sur le graphe de la fonction $x \longmapsto x^2$ les équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+ : x^2 \geq r \iff \dots ; x^2 \leq r \iff \dots$
5. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

2 Trigonométrie

6. Indiquer sur le cercle trigonométrique la définition géométrique du cosinus, du sinus et de la tangente, et donner l'ensemble de définition de la fonction tangente.
7. Donner le cosinus, le sinus et la tangente d'un multiple de $\pi/6$ ou de $\pi/4$ choisi par l'examineur.
8. Donner la formule de $\cos(a+b)$ (resp. $\sin(a+b)$) et en déduire celle de $\cos(a-b)$ (resp. $\sin(a-b)$).
9. Donner la formule exprimant $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
10. Donner la définition de arccos, arcsin ou arctan.

3 Suites usuelles

11. Donner la définition d'une suite arithmétique (ou géométrique) $(u_n)_{n \geq 0}$, puis donner et démontrer la formule donnant l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n .
12. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n si (u_n) est une suite arithmético-géométrique choisie par l'examineur.
13. Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ en fonction de $q \in \mathbb{R}$ et illustrer chacun des quatre cas $q > 1$, $0 < q < 1$, $-1 < q < 0$ et $q < -1$ par un schéma.
14. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 choisie par l'examineur.

4 Nombres complexes

15. Résoudre sur $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels choisie par l'examineur.
16. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$) choisie par l'examineur.
17. Donner la définition du conjugué de $z \in \mathbb{C}$ puis démontrer que : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'}$. Si M est un point d'affixe z , indiquer sur un schéma comment placer le point M' d'affixe $\overline{z}$.
18. Donner la définition du module de $z \in \mathbb{C}$ puis démontrer que : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z| |z'|$. Si M est un point d'affixe z , indiquer sur un schéma à quoi correspond géométriquement $|z|$.
19. Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe simple choisi par l'examineur (exemples : $\frac{3+i}{1-i}$, $(1-2i)^2(3+i)$, $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)$).
20. Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe simple choisi par l'examineur (exemples : $1+i$, $\sqrt{3}-i$, $\frac{1+i^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$).
21. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$.
22. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 = w$ où $w \in \mathbb{C}$ est une constante choisie par l'examineur. *On précisera aux élèves si on souhaite qu'ils cherchent z sous forme algébrique ou polaire.*
23. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
24. Linéariser $\cos(\theta) \sin^2(\theta)$.
25. Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$ déterminer la valeur de $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et de $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

5 Sommes et produits

26. Donner et démontrer par récurrence la valeur de $\sum_{k=1}^n k$.
27. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ et/ou de $\sum_{k=0}^n q^k$.
28. En utilisant la valeur de $\sum_{k=0}^m q^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^n q^k$ pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $p \leq n$.
(via un "découpage")
29. Pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $S = \sum_{k=0}^n q^k$ en effectuant un télescopage sur $(1-q)S$.
30. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer une formule parmi : formule de symétrie, formule d'absorption, formule de Pascal.
31. Énoncer la formule du binôme de Newton.

32. À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, développer rapidement $(1+x)^5$ et $(x-1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examinateur).
33. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.
34. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ calculer $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

6 Études de fonctions

35. Si $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$, donner la définition de $f \circ g$. On précisera son ensemble de définition en fonction de D_f et D_g . Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ pour deux fonctions f et g simples choisies par l'examinateur.
36. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de f est (strictement) (dé)croissante sur I .
37. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à la fois croissante et décroissante sur I . Démontrer que f est constante sur I .
38. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 . Donner l'équation de la tangente au graphe de f en x_0 .
39. Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1+x$.
40. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition de " f admet un minimum en a ". On pourra remplacer "*minimum*" par "*minimum local*", "*maximum*", "*maximum local*".
41. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de " f est (im)paire" ou " f est T -périodique" et expliquer ce qu'on peut alors dire du graphe de f .
42. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.
43. Présenter une fonction usuelle parmi : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue.

7 Ensembles

44. Soient les ensembles $A = \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), t \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ (*attention, ici il y a deux questions en une*). On considérera l'élément $(-1, 0)$.
45. Soit $K = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telle que $K = A \times B$.
46. Énoncer les formules appelées "distributivité" de $\cup$ et $\cap$.
47. Énoncer les formules appelées "règles de De Morgan" pour le complémentaire d'une union et d'une intersection.

8 Suites réelles

48. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou de : (u_n) tend vers $+\infty$, ou de : (u_n) tend vers $-\infty$ et savoir l'expliquer sur un dessin.
49. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (cas limite finie et limite infinie), théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes, théorème de comparaison.
50. Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) converge.
- On utilisera que $\forall k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
51. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la suite (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.
52. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{u_n}$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$. On montrera que (u_n) est croissante et ne peut pas converger.
53. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites non nulles à partir d'un certain rang, donner la définition de $u_n \sim v_n$. Énoncer ensuite un ou plusieurs des équivalents usuels (valables si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) parmi :

• si $\alpha \neq 0$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$	• $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ • $\sin(u_n) \sim u_n$	• $\tan(u_n) \sim u_n$ • $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
---	---	---

54. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

9 Systèmes linéaires

55. Savoir résoudre un système linéaire à n équations et p inconnues pour $n, p \in \{2, 3, 4\}$ par la méthode du pivot de Gauss.

10 Applications

56. Soit $f : E \longrightarrow F$. Donner la définition de “ f est injective” et de “ f est surjective”.
57. Donner un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective (avec des parenthèses choisies par l'examineur).
58. Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(2) = 1$, 1 est un antécédent de 3 par f et 4 n'a pas d'antécédent par f (ou toutes autres conditions similaires choisies par l'examineur).
59. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Après avoir rappelé les ensembles de départ et d'arrivée de $g \circ f$, montrer un des deux énoncés suivants (au choix de l'examineur) :
- (a) si $g \circ f$ est injective alors f est injective,
 - (b) si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

60. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection entre deux intervalles I et J telle que f' ne s'annule pas. On admet que f^{-1} est dérivable sur J . Énoncer la formule donnant $(f^{-1})'$.
61. Montrer que $P(X) = X^3 - 3X + 1$ admet 3 racines réelles.

11 Matrices

62. Donner la définition du produit matriciel.
63. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^p pour tout $p \geq 2$ en utilisant le binôme de Newton.
64. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ choisie par l'examineur est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot de Gauss.
65. Démontrer que si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
66. Énoncer le théorème donnant l'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examineur.
67. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ alors $(AB)C = A(BC)$.
68. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices (*à l'attention des élèves : attention, citer les hypothèses adéquates est également attendu de cette question*).
69. Démontrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $(AB)^T = B^T A^T$.
70. Donner la définition d'une matrice (anti-)symétrique.

12 Dénombrement

71. Énoncer la formule donnant le cardinal d'une union de 2 ensembles finis.
72. Énoncer la formule donnant le cardinal du complémentaire d'un ensemble fini.
73. Donner la définition d'une partition d'un ensemble. Quelle formule sur les cardinaux a-t-on dans ce cas ?
74. Si $\text{Card}(E) = n$ que vaut $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$? Démontrer cette formule en partitionnant $\mathcal{P}(E)$ selon le nombre d'éléments des sous-ensembles de E .
75. Déterminer le nombre d'anagrammes d'un mot choisi par l'examineur. *Les élèves ne doivent pas simplement appliquer une formule toute faite, mais expliquer la manière de compter.*
76. Énoncer la formule d'absorption pour les coefficients binomiaux et la démontrer par un argument combinatoire.

13 Probabilités

77. Donner la définition d'un système complet d'évènements d'un espace probabilisé. Quelle formule sur les probabilités a-t-on dans ce cas ?
78. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
79. Donner et démontrer la formule donnant $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.

80. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}_B$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
81. Quand dit-on que des événements sont mutuellement indépendants ? Deux à deux indépendants ?
82. Énoncer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes ; puis l'appliquer sur un exemple simple proposé par l'examineur.
83. Donner la définition de “ A et B sont deux événements indépendants”, puis démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B (ou, au choix de l'examineur, A et $\overline{B}$) le sont aussi.

14 Limites de fonctions

84. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $I \subset \mathbb{R}$. Donner une des neuf définitions avec des quantificateurs de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ pour un choix de $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fait par l'examineur.
85. Montrer que la fonction $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
86. Énoncer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
87. Énoncer le théorème de comparaison pour les fonctions.
88. Rappeler la définition de fonctions équivalentes puis donner un équivalent usuel en 0 d'une ou plusieurs des quantités suivantes : $e^x - 1$, $\sin(x)$, $\cos(x) - 1$, $\tan(x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\ln(1+x)$.

15 Espaces vectoriels

89. Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation cartésienne ou par paramètres est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. *L'examineur choisira l'ensemble F et la valeur de $n \in \{2, 3, 4\}$.*
90. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .
91. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_n \in E$. Donner la définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E .
92. Donner la définition d'une famille libre et d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.
93. Qu'appelle-t-on coordonnées d'un vecteur dans une base ?
94. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs.
95. Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$.
96. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.

16 Continuité

97. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Donner la définition de : “ f est continue en x_0 ”. Illustrer cette définition par les graphes d’une fonction continue et d’une fonction discontinue en x_0 .
98. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et l’expliquer sur un dessin.
99. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f ne s’annule pas sur I alors f est de signe constant sur I .

17 Dérivation

100. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions de “ f est continue en x_0 ” et de “ f est dérivable en x_0 ”. Quelle notion implique l’autre ?
101. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 , donner l’équation de la tangente en x_0 au graphe de f . Appliquez cette formule dans le cas d’une fonction f choisie par l’examineur.
102. Énoncer le théorème donnant la dérivée de la bijection réciproque d’une fonction.
103. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ”.
104. Déterminer la dérivée n -ème de $f : x \longmapsto e^{2x}$.
105. Énoncer le théorème de Rolle et l’illustrer sur un dessin.
106. Énoncer le théorème des accroissements finis et l’illustrer sur un dessin.

18 Intégration

107. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Rappeler la définition d’une primitive de f sur I puis démontrer que deux primitives de f sur I diffèrent d’une constante.
108. Donner la définition des sommes de Riemann d’une fonction f définie sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de ces sommes ?
109. Énoncer le théorème d’intégrations par parties.
110. Déterminer les primitives de $\ln$ sur $\mathbb{R}_*^+$ grâce à une intégrations par parties.
111. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire (resp. impaire) et soit $a > 0$, démontrer que $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ (resp. $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$).

19 Géométrie

112. Donner la définition du déterminant de deux vecteurs u et v du plan exprimés dans la base canonique. Compléter ensuite la propriété suivante : $\det(u, v) \neq 0 \iff$ la famille (u, v) est ...
113. En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrer que pour tous vecteurs u, v on a : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$.
114. Donner la définition du produit scalaire et de la norme dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

- 115. Donner la définition d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'une famille de vecteurs choisie par l'examineur est une telle base.
- 116. Déterminer une équation cartésienne d'une droite du plan dont l'examineur donne la représentation graphique, et, inversement, dessiner une droite du plan dont l'examineur donne une équation cartésienne.

20 Applications linéaires

- 117. Savoir montrer qu'une application simple est linéaire et en déterminer la matrice dans les bases canoniques.
- 118. Soient E , F et G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Laquelle des composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
- 119. Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Ker}(f)$ pour que f soit injective.
- 120. Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $\text{Im}(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Im}(f)$ pour que f soit surjective.
- 121. Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$ (resp. de $\text{Im}(f)$) puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E (resp. de F).
- 122. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.
- 123. En vous appuyant sur le théorème du rang, expliquer pourquoi si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie, on a : f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.

21 Polynômes

- 124. Donner la définition du degré d'un polynôme et énoncer la formule donnant le degré d'un produit.
- 125. Énoncer le théorème faisant le lien entre racine d'un polynôme et factorisation (on précisera les définitions de "racine" et de "divise").
- 126. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
- 127. Factoriser un polynôme de degré 3 ou 4 en utilisant une ou des racines évidentes.

22 Équations différentielles linéaires

- 128. Résoudre une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients et second membre constants choisie par l'examineur, avec ou sans condition initiale.
- 129. Résoudre une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients et second membre constants choisie par l'examineur, avec ou sans condition initiale.
- 130. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre choisie par l'examineur en utilisant la méthode de variation de la constante.

23 Variables aléatoires

131. On admet la linéarité de $\mathbb{E}$ et que si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Démontrer que si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
132. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (ou une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ou une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$) ? Donner ensuite la formule de son espérance et de sa variance (sauf pour la loi uniforme).
133. Soit $A \subset \Omega$, donner la définition de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ et préciser sa loi.
134. Quand dit-on qu'une variable aléatoire est centrée (et/ou réduite) ? Démontrer que si X est une variable aléatoire finie alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée (et/ou $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée-réduite).
135. Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ? Tracer le graphe de cette fonction dans le cas où X suit une loi usuelle simple choisie par l'examineur.
136. Donner la définition de la variance d'une variable aléatoire, puis énoncer et démontrer la formule de König-Huygens.
137. Quand dit-on que 2 variables aléatoires réelles finies X et Y sont indépendantes ?
138. On admet que si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

24 Développements limités

139. Si f et g sont deux fonctions réelles définies au voisinage de 0 et ne s'annulant pas, donnant la définition de $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(g(x))$.
140. Énoncer la formule de Taylor-Young.
141. Donner le développement limité à l'ordre n (ou $2n$ pour $\cos$, $2n + 1$ pour $\sin$) en 0 d'une des expressions suivantes : $\frac{1}{1-x}$, e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\cos(x)$, $\sin(x)$.

25 Fonctions de deux variables

142. Donner la définition des applications partielles d'une fonction $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$.
143. Donner la définition du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Calculer le gradient d'une fonction de deux variables choisie par l'examineur.
144. Énoncer le théorème de Schwarz et le vérifier sur un exemple choisi par l'examineur.
145. Donner la définition d'un point critique d'une fonction de deux variables. Énoncer un théorème faisant le lien entre point critique et extremum local.

26 Python

131. Écrire une fonction Python prenant en arguments deux réels x et y et renvoyant le réel $\frac{x^2}{2y} + \sqrt{x+1}$.

132. Écrire une fonction Python **valabs** prenant en argument un réel x et renvoyant $|x|$.
133. Écrire une fonction Python f prenant en argument un réel x et renvoyant $f(x)$ défini par :
- $$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$
134. Écrire une fonction Python **somme** (resp. **produit**) prenant en argument un entier n et renvoyant $\sum_{k=5}^n \frac{\sqrt{k}}{k+1}$ (resp. $\prod_{k=2}^n \frac{1+k}{2}$) ou de toute autre somme ou produit simple choisi par l'examineur.
135. Écrire une fonction Python **suite** prenant en argument un entier n et renvoyant u_n où la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n = f(u_{n-1})$, $u_{n+1} = f(u_n, n)$ ou $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.
136. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$. On admet que (u_n) est décroissante et tend vers 0. Écrire une fonction Python **seuil** prenant en argument $\varepsilon > 0$ et renvoyant la plus grande valeur de u_n telle que $u_n < \varepsilon$.
137. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et renvoyant la liste $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$ où (u_n) est une suite de réels choisie par l'examineur du type $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n, n)$.
138. Écrire une fonction Python **minimum** prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant le minimum de cette liste.
139. Écrire une fonction Python prenant en arguments une liste de nombres et renvoyant la somme de ses éléments (sans utiliser la fonction **sum**).
140. Écrire une fonction **nombre_a** prenant en argument une chaîne de caractères c et renvoyant le nombre de fois que c contient la lettre **a**. Par exemple **nombre_a**("banane") doit renvoyer 2. On utilisera un parcours par éléments.
141. Écrire une fonction **place_a** prenant en argument une chaîne de caractères c et renvoyant la liste des indices auxquels c contient la lettre **a**. Par exemple **place_a**("banane") doit renvoyer $[1, 3]$.
142. Rappeler la définition de la moyenne et de l'écart type d'une série $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de nombres réels. Écrire deux fonctions Python prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant respectivement leur moyenne et leur écart-type.
143. Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ choisie par l'examineur.
144. Écrire un programme Python permettant de tracer u_n en fonction de n où (u_n) est une suite définie par récurrence choisie par l'examineur.
145. Écrire une fonction Python **recherche** prenant en argument une liste L et un élément de type quelconque a et renvoyant l'indice de la première occurrence de a dans la liste L . La fonction renverra "introuvable" si a n'est pas un élément de L .
146. On décrit un brin d'ADN par une liste dont les éléments sont toujours un des quatre caractères "A", "T", "C" et "G". Le début d'un message génétique est généralement signalé par le codon "A", "T", "G". Écrire une fonction **depart** qui prend en argument un brin

d'ADN et renvoie l'indice du début du message génétique.

Par exemple, `depart(["C", "G", "A", "A", "T", "C", "A", "T", "G", "G", "T", "A"])` doit renvoyer 6.

La fonction renverra un message d'erreur si le codon de départ n'est pas présent dans le message génétique considéré.

147. Écrire une fonction Python **transforme** prenant en argument une liste et la renvoyant après avoir transformé tous les 4 qu'elle contient en des 5.
148. Écrire une fonction Python **miroir** prenant en argument une liste et renvoyant la liste inversée. Par exemple `miroir([1,2,3])` doit renvoyer `[3,2,1]`. *Le colleur pourra imposer, ou non, que la liste prise en argument ne soit pas modifiée par l'exécution de la fonction.*
149. Écrire une fonction Python **produitmat** prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.
150. Écrire une fonction Python **transpose** prenant en argument une matrice A et renvoyant sa transposée.
151. Écrire une fonction Python **tri** réalisant le tri d'une liste de nombres selon (au choix de l'examineur) l'algorithme du tri par sélection ou du tri par insertion. Vous illustrerez les différentes étapes de l'algorithme sur une liste simple de votre choix.
152. Écrire une fonction **compte** prenant en arguments une chaîne de caractères **texte** et un caractère **lettre** et renvoyant le nombre de fois que **lettre** apparaît dans **texte**.
153. Écrire une fonction Python **alea** ne prenant rien en argument et renvoyant "a" avec probabilité 0,2, "b" avec probabilité 0,35, et "c" avec probabilité 0,45.
154. Écrire un programme Python simulant une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En déduire un code permettant d'estimer la valeur de l'espérance et de la variance de cette loi.
155. Écrire un code Python permettant d'estimer une probabilité, une espérance ou une variance.
156. Écrire un code Python permettant d'approcher la valeur de $\int_a^b f$ pour une fonction f donnée (grâce à une somme de Riemann).