Fiche-Méthode : Les mathématiques du physicien — Méthode $\varphi\chi$ 01

Capacités exigibles

Savoir mener un calcul ou une résolution sans faire d'erreurs mathématiques.

I Résolution d'équations du premier et du second degré

Soit l'équation de degré 2 :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pour trouver les solutions à l'équation, on peut :

- Effectuer le calcul « à la main » *via* le discriminant (toujours positif ou nul en physique chimie pour trouver des racines réelles) et trouver une ou deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Calculer à l'aide d'un programme ou solveur sur la calculatrice (à maîtriser parfaitement)

Applications à la physique-chimie 1

1. Calculer l'avancement ξ de la réaction sachant que $n_0 = 3.0\,\text{mol}$ et que :

$$0,24 = \frac{2\xi}{n_0 - \xi}$$

2. On cherche à déterminer l'avancement volumique finale d'une réaction dont l'expression de la constante d'équilibre est la suivante. Trouver les deux valeurs possibles de $x_{\text{éq}}$.

$$K^\circ = \frac{x_{\text{éq}} C^\circ}{(c_0 - x_{\text{éq}})^2}$$

Avec $K^\circ = 108,7$, $c_0 = 1.00 \times 10^{-2}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}$ et C° est la concentration standard dans les conditions normales de température et de pression (égale à $1\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}$).

II Manipulations de fractions

On rappelle que :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{c+b}{b \times c}$$

Applications à la physique-chimie 2

1. Deux résistances électrique R_1 et R_2 placées en parallèle peuvent être remplacées par une résistance dite équivalente $R_{\text{éq}}$ telle que $\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Calculer $R_{\text{éq}} sachant que \mathrm{R}_1 = 1\,\text{Ohm} et \mathrm{R}_2 = 3\,\text{Ohm}$.
2. Sachant que la formule de conjugaison d'une lentille de distance focale f, s'écrit

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

avec $\overline{OA} = p$ et $\overline{OA'} = p'$. Déterminer la position de l'image A (c'est-à-dire p) par la lentille de centre O sachant que l'objet se situe en A à 20 cm en amont de la lentille (c'est-à-dire $p = -20\,\text{cm}$ et $f = 5\,\text{cm}$.

III Calculs de puissance de 10

On rappelle que :

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$$
$$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$
$$\frac{1}{10^a} = 10^{-a}$$
$$(10^a)^b = 10^{a\times b}$$

Applications à la physique-chimie 3 (Solution à la page ??)

1. Calculer, sans calculatrice, la concentration d'une espèce A sachant que la quantité de matière est de 10^{-2} mol et le volume de 500 mL.
2. Calculer sans calculatrice $K° = \dfrac{10^{-pKa_1}}{10^{-pKa_2}}$ avec $pKa_1 = 9,2$ et $pKa_2 = 12,3$.

IV Fonction logarithme décimal

On rappelle que :

$$\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$
$$\log(a^b) = b \times \log(a)$$
$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = log(a) - \log(b)$$
$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$
$$a = \log(b) \Rightarrow b = 10^a$$

Exercice 1

Calculer sans calculatrice les éléments suivants :

$$\log(1), \log(10^0), \log(10), \log(10^3), \log(10^{-5}), \log\left(\frac{1}{10^4}\right)$$

Applications à la physique-chimie 4

1. Calculer, sans calculatrice, le pH d'une solution en ion oxonium de .
2. Déterminer la concentration en ion oxonium d'une solution de pH égal à 3.
3. Calculer le pK_A pour $K_A = 1 \cdot 10^{-4}$.
4. Montrer que si $[A^-] > 10[AH]$, alors $\log([A^-]/[AH]) > 1$ puis montrer qu'alors $pH > pK_A + 1$ Où AH désigne l'acide conjugué d'une espèce A^-.
5. Montrer que si $K° = \dfrac{K_{A1}}{K_{A2}}$ alors $K° = 10^{pK_{a2} - pK_{a1}}$.

V Propriétés de la fonction exponentielle et logarithme népérien

On rappelle que :

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(\exp x) = x$$

$$\exp(x) = e^x$$

$$\exp(1) = e$$

$$\exp(a) \times \exp(b) = e^a \times e^b = e^{a+b}$$

Exercice 2

Résoudre :
1. $e^x = e^3$ 2. $e^x = 3$ 3. $e^{-3x+5} = 1$.

Applications à la physique-chimie 5

1. Sachant que la pression peut évoluer au cours du temps suivant la loi suivante :

$$P = P_0(2 - \exp(-kt))$$

P_0 est la pression atmosphérique et k une constante de vitesse de la réaction chimique étudiée. Isoler le facteur kt en fonction du reste.

2. Sachant que l'énergie d'activation E_a d'une réaction chimique peut se calculer à l'aide de deux températures suivant la relation :

$$A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_1}\right) = 3,56 \times A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_2}\right)$$

Avec A le facteur préexponentielle, R la constante de Joules égale à $8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ et $T_1 = 648\,\mathrm{K}$ et $T_2 = 675\,\mathrm{K}$.
Calculer E_a.

VI Résolution d'équations différentielles

Définition 1 : Équation différentielle

On appelle équaton différentielle du premier ordre pour la fonction y de la variable x, une équation qui relie la fonction $y(x)$ à sa dérivée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + by(x) = c$$

avec a et b des coefficients constants en fonction de x et c un terme pouvant dépendre de x ou non.

En général, la fonction y est fonction du temps :

$$a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + by(t) = c$$

Les coefficients a et b seront des constantes par la suite, mais c pourra dépendre du temps (programme de 2ème année en physique).

- L'équation est dite **homogène** (ou sans second membre) si $c = 0$;
- L'équation est dite **non homogène** (ou avec second membre) si $c \neq 0$

Méthode 1

1. Réarranger l'équation :
   Il faut réarranger l'équation pour faire en sorte qu'il n'y ait pas de coefficient devant la dérivée première. Avec les notations précédentes, cela donne :
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{a} \times y(t) = \frac{c}{a}$$
   Pour simplifier les notations, on notera :
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha \times y(t) = \beta$$
2. Si l'équation est homogène :
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha \times y(t) = 0$$
   L'ensemble des solutions de cette équation s'écrivent sous la forme :
$$y(t) = Ke^{(-\alpha t)}$$
   Avec K une constante (due à l'intégration de l'équation), dite constante d'intégration que l'on déterminera à l'aide des conditions initiales.
3. Si l'équation est non homogène (présence d'un second membre β)
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha \times y(t) = \beta$$
   Les solutions de l'équation différentielle non homogène peuvent s'écrire sous la forme :
$$y(t) = y_{SP}(t) + y_H(t)$$
   Avec $y_{SP}(t)$ une solution particulière de l'équation et $y_H(t)$ la solution de l'équation homogène. La solution particulière se détermine en examinant l'expression du second membre (β ici).

   Lorsque le second membre est constant (seul cas en première année de BCPST), la solution particulière est sous la forme d'une constante à déterminer. Dans ce cas $y_{SP}(t) = K'$
   Détermination de K :
   On injecte la solution particulière y_{SP} dans l'équation différentielle.
   Dernière étape : Déterminer la constante d'intégration K
   On détermine K à l'aide d'une condition particulière sur $y(t)$: les conditions initiales définies par le problème.

Exercice 3

Donner l'ensemble des solutions dans les cas suivants :
1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 0$. Quelle solution vérifie $y(1/3) = 1$?
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 4$.

Applications à la physique-chimie 6

1. On considère une population de N noyaux radioactifs. N est une fonction du temps. La loi qui traduit leur désintégration est : $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$ où λ est une constante.
   La population initiale étant N_0, déterminer $N(t)$.

2. L'étude d'un réseau électrique conduit à l'équation :

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E \text{ pour } t > 0$$

où u est la tension aux bornes d'un condensateur de capacité C associé à une résistance R chargé sous une tension constante E. À $t \geq 0$, $u(t) = 0$. Déterminer $u(t)$ pour $t > 0$.

VII Primitives et calcul intégrale

Par lecture inverse du tableau on retrouve les dérivées usuelles :

Fonction f	sur l'intervalle	Une primitive
$f(x) = a$ $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f = \frac{1}{x^3}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x)$

Et un complément sur les primitives de fonctions composées :

Fonction f	sur l'intervalle	Une primitive
$f(x) = u(x) \times \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$	$[a; b]$	$F(x) = -\frac{u^2(x)}{2}$
$f(x) = \frac{1}{u^2(x)} \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$	$[a; b]$ sans annulation de u	$F(x) = -\frac{1}{u(x)}$
$f(x) = \frac{1}{u(x)} \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$	$[a; b]$ avec $u > 0$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$	$[a; b]$ avec $u > 0$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)}$
$f(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \exp(u(x))$	$[a; b]$	$F(x) = \exp(u(x))$

Exercice 4 (Solution à la page ??)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes selon la variable donnée :

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 5$
2. $g(x) = \frac{5}{x^3}$
3. $h(t) = 5\frac{\ln(kt)}{t}$
4. $y(t) = e^{-\lambda t + 1}$
5. $p(x) = 3x^{x^2 - 1}$
6. $p(z) = \frac{2}{1 - 3z}$

Calculer :

1. $\int_0^1 x(x^2 + 7)^5 \mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} \mathrm{d}x$