TD $\varphi\chi$ 0 – Analyse dimensionelle

Relier cours et exercices

Capacités et compétences du cours ...	... à appliquer dans ...
▸ Vérifier l'homogénéité d'équations physiques.	▸ Exercices n° 3 et 5
▸ Donner des ordres de grandeur à partir d'une analyse dimensionnelle.	▸ Exercices n° 1 2 4 et 6

Savoir appliquer son cours

Exercice n° 1 : Le pendule ★

Soit un objet de masse m, attaché par un fil inélastique, de masse négligeable, de longueur ℓ, à un point fixe dans l'espace. On sait que la seule force extérieure agissant sur le système {fil-masse} est son poids.

1. Exprimer, en fonction des paramètres du problème, la période du pendule précédemment décrit. En déduire un ordre de grandeur pour un pendule de taille raisonnable.
2. Comment variera la période du pendule si la longueur du fil passe de ℓ à 2ℓ ? $n\ell$?

Exercice n° 2 : La poussée d'Archimède ★

La poussée d'Archimède est la force particulière que subit un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide soumis à un champ de gravité. Cette force provient de l'augmentation de la pression du fluide : la pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale orientée vers le haut. C'est à partir de cette poussée qu'on définit la flottabilité d'un corps. Expérimentalement on peut montrer que la poussée d'Archimède dépend du volume du corps immergé dans le fluide, du type de fluide utilisée (en particulier la masse volumique semble intervenir), et de l'accélération de la pesanteur.

À l'aide d'une analyse dimensionnelle déterminer une expression permettant de d'obtenir un ordre de grandeur de la poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps.

Exercice n° 3 : Équation d'état des gaz parfaits ★

Le gaz parfait est un modèle simple décrivant le comportement des gaz aux faibles pressions. Ils sont caractérisés par l'équation d'état ci-dessous :

$$PV = nRT$$

Sachant que $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, vérifier l'homogénéité de cette équation.

S'entraîner

Exercice n° 4 : Constantes de temps de l'électrocinétique ★★★

Les dipôles idéaux de l'électrocinétique, traversées par une intensité i durant Δt, sont caractérisés par la résistance R du résistor, la capacité C d'un condensateur (emmagasinant une charge q) et l'inductance L d'une bobine. Chacun de ces dipôles échange de l'énergie avec le reste du circuit :

$$\text{résistor : } E_{\mathrm{R}} = Ri^2\Delta t \quad ; \text{bobine : } E_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}Li^2 \quad ; \text{condensateur : } E_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Montrer qu'à partir de R, L et C on peut construire trois grandeurs homogènes à un temps.

Exercice n° 5 : Vérifications de formules ★

On a demandé à des étudiants de calculer la force d'attraction entre les deux armatures d'un condensateur plan d'épaisseur d et de capacité C. Trois étudiants ont donné pour réponse respective :

$$\text{a) } F = \frac{Q^2}{2Cd^2} \quad \text{b) } F = \frac{Q}{2Cd^2} \quad \text{c) } F = \frac{Q^2}{2Cd}$$

Quelle(s) réponse(s) est (sont) susceptible(s) d'être correcte(s) ?

Exercice n° 6 : Cuisson d'une dinde [6] ★★★

Une dinde de 1,5 kg est bien cuite en son centre après 55 minutes au four. Estimer le temps nécessaire pour obtenir le même résultat sur une dinde deux fois plus lourde.

Astuce ! la diffusion de la chaleur dans un corps dépend du coefficient de diffusivité thermique de ce corps, D, en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

6. $\tau_2 \approx 87\,\mathrm{min}$ en approximant la dinde par une sphère homogène

Corrections

Correction de l'exercice n° 6 « Cuisson d'une dinde »:

Soit une dinde de 1,5 kg supposée sphérique de rayon R_1 et une autre dinde de masse 3 kg et de rayon R_2.

D'après l'aide, la diffusion de la chaleur dans le corps dépend de D qui est le même pour les deux dindes. Or, par analyse dimensionnelle :

$$D \sim \frac{R_1^2}{\tau_1} = \frac{R_2^2}{\tau_2}$$

avec τ_1 et τ_2 les durées de cuisson (durée que met la chaleur à diffuser de la peau jusqu'à l'os) des dindes respectivement 1 et 2.
Comme nous n'avons que les masses des dindes comme seules données, il nous faut relier le rayon de chaque dinde avec sa masse. On ne connaît pas les rayons mais les volumes respectifs de chaque dinde sont :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \\ V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \end{cases}$$

donc les masses :

$$\begin{cases} m_1 = \rho_{\text{dinde}} \times V_1 = \rho_{\text{dinde}} \times \frac{4}{3}\pi R_1^3 \\ m_2 = \rho_{\text{dinde2}} = \rho_{\text{dinde}} \times \frac{4}{3}\pi R_2^3 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} R_1 = \left(\frac{m_1}{\rho_{\text{dinde}}} \times \frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \\ R_2 = \left(\frac{m_2}{\rho_{\text{dinde}}} \times \frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \end{cases}$$

En réinjectant les expressions de R_1 et R_2 dans D, on trouve :

$$\tau_2 = \tau_1 \times \left(\frac{\frac{m_2}{\rho_{\text{dinde}}} \times \frac{3}{4\pi}}{\frac{m_1}{\rho_{\text{dinde}}} \times \frac{3}{4\pi}}\right)^{2/3} = \tau_1 \times \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3}$$

L'application numérique donne $\tau_2 \approx 87\,\text{min}$