

Exercice 1 : Questions mêlées

$$1. \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1.$$

$$2. \forall a, b \in \mathbf{R}, \cos(a+b) + \cos(a-b) = [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)] + [\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)]$$

donc $B = 2\cos(a)\cos(b).$

$$3. f(x) \text{ existe si et seulement si } \cos(2x) - \frac{1}{2} > 0. \quad \text{On résout cette inéquation :}$$

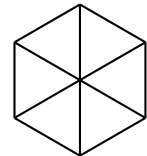
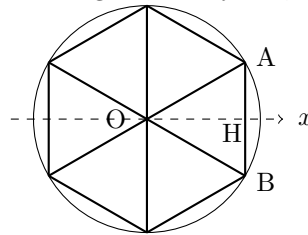
$$\cos(2x) - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \cos(2x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, -\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right[.$$

$$4. \text{ Un hexagone régulier est constitué de 6 triangles équilatéraux, selon la figure :}$$

Considérons le cercle circonscrit à cet hexagone, de rayon 1, et le triangle OAB :



Le milieu H du segment $[AB]$ est de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ car l'angle $\widehat{HOA}$ vaut $\frac{\pi}{6}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'aire du triangle OAB est donc $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1}{2} \times AB \times OH = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'aire de l'hexagone vaut 6 fois l'aire de OAB donc cette aire vaut $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

1. `from math import cos`

`def f(t) :`

`return cos(3*t)*cos(t)**3`

$$2. \text{ Soit } t \in \mathbf{R}. \text{ Alors } f(t+\pi) = \cos(3(t+\pi))\cos(t+\pi)^3$$

$$= \cos(3t+3\pi)(-\cos(t))^3$$

$$= \cos(3t+\pi)(-1)^3\cos^3(t)$$

$$= -\cos(3t)(-\cos^3(t))$$

$$= \cos(3t)\cos^3(t) = f(t) \quad \text{donc } f \text{ est périodique de période } \pi.$$

$$3. \text{ Soit } t \in \mathbf{R}. \text{ Alors } f(-t) = \cos(-3t)\cos(-t)^3 = \cos(3t)\cos^3(t) \quad \text{car } \cos \text{ est paire.}$$

Donc $\forall t \in \mathbf{R}, f(-t) = f(t)$, c'est-à-dire que f est paire.

$$4. \text{ On peut donc étudier } f \text{ sur } I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ en effectuant les transformations suivantes :}$$

- symétrie axiale d'axe (Oy) pour connaître $\mathcal{C}_f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbf{Z}$) pour connaître $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbf{R}$.

5. $\forall t \in \mathbf{R}, f(\pi - t) = \cos(3(\pi - t)) \cos(\pi - t)^3 = \cos(3\pi - 3t)(-\cos t)^3$
 $= -\cos(\pi - 3t) \cos^3(t) = -(-\cos(3t)) \cos^3(t) = \cos(3t) \cos^3(t) = f(t).$

6. Par opérations, f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\forall t \in \mathbf{R}, f'(t) = -3 \sin(3t) \cos^3(t) + \cos(3t) \times 3(-\sin(t)) \cos^2(t)$$

en appliquant les règles : $(uv)' = u'v + uv'$, $(\cos u)' = -u' \sin(u)$ et $(u^n)' = nu' u^{n-1}$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbf{R}, f'(t) = -3 \cos^2(t) (\sin(3t) \cos(t) + \cos(3t) \sin(t)).$

7. Voir le cours.

8. $\forall t \in \mathbf{R}, \sin(4t) = \sin(3t + t) = \sin(3t) \cos(t) + \cos(3t) \sin(t)$ donc d'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f'(t) = -3 \cos^2(t) \sin(4t).$$

9. $\forall t \in I, -3 \cos^2(t) \leq 0$ et s'annule en $t = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, $\sin(4t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en 0, en $\frac{\pi}{4}$ et en $\frac{\pi}{2}$.

On obtient donc le tableau de signes suivant pour $f'(t)$:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	0	-	0

10. On en déduit le tableau de variations de f sur I :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	0	-	0
f	1	$-\frac{1}{4}$	0

avec $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{4}$, et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

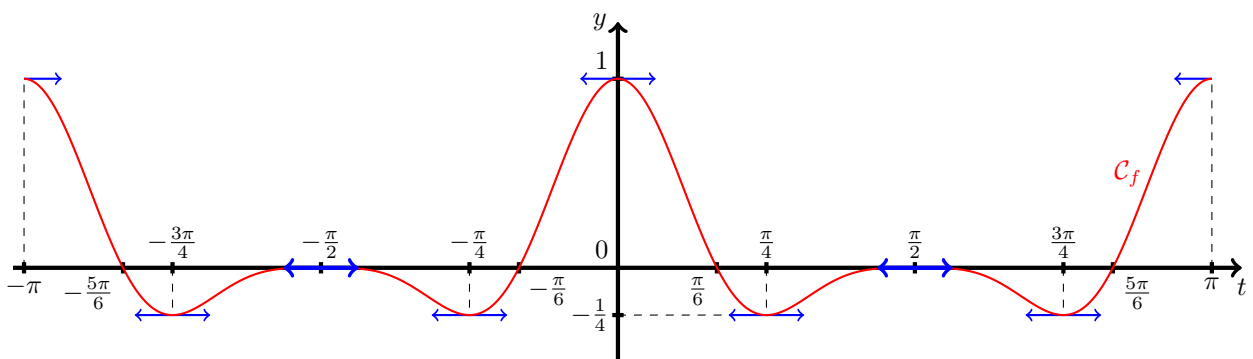
11. Soit $t \in I$. Alors $f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) \cos^3(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) = 0$ ou $\cos^3(t) = 0$

$$\Leftrightarrow 3t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ ou } t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } t = \frac{\pi}{2} \quad \text{car } t \in I.$$

12. Courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$:



Exercice 3

1. D'après la formule d'addition du cosinus :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in]-\pi, \pi], 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \left(\cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta) \right) \\ &= \cos(\theta) - \sqrt{3} \sin(\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. (E) : 1 + 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) &= 0 \Leftrightarrow \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = -\pi + 2k\pi\end{aligned}$$

Mais $\theta \in]-\pi, \pi]$, donc : $(E) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta = \pi.$

3. D'après la question précédente, $\mathcal{D}_f =]-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$ donc $\mathcal{D}_f =]-\pi, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \pi[.$

4. Par opérations, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et, en utilisant la règle $\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$, on obtient :

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_f, f'(\theta) = \frac{3(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)}{(1 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2}.$$

$$\begin{aligned}5. (E') : \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) &\geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, 0 + 2k\pi \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{aligned}$$

Mais $\theta \in]-\pi, \pi]$, donc $(E') \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}.$

$$\begin{aligned}6. \text{D'après la formule d'addition du sinus : } \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) &= \sin \theta \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \theta \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)\end{aligned}$$

donc $\forall \theta \in \mathcal{D}_f, f'(\theta) = \frac{6 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}{(1 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2}.$ Le signe de $f'(\theta)$ est donc celui de $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right).$

D'après la question précédente, on obtient le tableau de signe de f' et de variations de f suivant :

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(\theta)$		-	0	+	
f		$+\infty$	$+\infty$	-3	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			1	$-\infty$	$-\infty$

dans lequel on a déjà fait figurer les résultats des questions suivantes.

$$7. f \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 1$$

$$f \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = -3$$

8. Sur $]-\pi, \frac{\pi}{3}[$, f admet un minimum égal à 1 donc $\forall \theta \in]-\pi, \frac{\pi}{3}[$, $f(\theta) > 0.$

Sur $]\frac{\pi}{3}, \pi[$, f admet un maximum égal à -3 donc $\forall \theta \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, $f(\theta) < 0.$

9. On pose $g(\theta) = 1 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta$.

Par opérations : $\lim_{\theta \rightarrow -\pi} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} g(\theta) = 0$

D'après le signe de f : $\lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} g(\theta) = 0^+$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) = 0^-$

Donc par opérations : $\lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\theta) = -\infty$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc 3 asymptotes verticales, d'équations : $x = -\pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \pi$.

10. Pour préciser, on peut rapidement calculer $f(0) = \frac{3}{2}$. On obtient la courbe suivante :

Courbe représentative de f

