

I Notation des sommes

1. Le symbole Σ
2. Indices de sommation
3. Changements d'indices

II Sommes usuelles

1. Sommes de constantes ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Sommes arithmétiques ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Sommes de carrés ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Sommes géométriques ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Propriétés des sommes

1. Linéarité
2. Associativité
3. Sommes télescopiques
4. Somme et ordre

IV Produits

1. Notation
2. Produits usuels ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. La fonction factorielle
4. Propriétés des produits
5. Produits télescopiques
6. Produit et ordre

V Coefficients binomiaux

1. Définition ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Valeurs à retenir ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Symétrie des coefficients binomiaux ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Lemme du pion ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Formule de Pascal ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Triangle de Pascal ($\rightarrow$ *Annexe*)
7. Binôme de Newton ($\rightarrow$ *Annexe*)

VI Sommes multiples

1. Sommes doubles rectangulaires
2. Sommes doubles triangulaires
3. Exemples d'autres sommes multiples

Annexes

2.1 Sommes de constantes : $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2$ avec $0 \leq p \leq n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\sum_{k=p}^n \lambda = (n - p + 1)\lambda$

2.2 Sommes arithmétiques : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2.3 Sommes de carrés : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.4 Sommes géométriques : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall q \in \mathbf{R}$, $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

4.2 Produits usuels :

- de constantes : $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2$ avec $0 \leq p \leq n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\prod_{k=p}^n \lambda = \lambda^{n-p+1}$

- d'entiers consécutifs : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n = n!$

$\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2$ avec $1 \leq p \leq n$, $\prod_{k=p}^n k = p \times (p+1) \times \dots \times n = \frac{n!}{(p-1)!}$

5.1 Définition des coefficients binomiaux :

Soient k et n deux entiers. On pose : $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.2 Valeurs à retenir : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n} = 1$.

5.3 Symétrie des coefficients binomiaux : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5.4 Lemme du pion : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

5.5 Formule de Pascal : Si $0 \leq k \leq n$, alors : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

5.6 Triangle de Pascal : On lit $\binom{n}{k}$ à l'intersection de la colonne k et de la ligne n .

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$n = 0$	1								
$n = 1$	1	1							
$n = 2$	1	2	1						
$n = 3$	1	3	3	1					
$n = 4$	1	4	6	4	1				
$n = 5$	1	5	10	10	5	1			
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

5.7 Binôme de Newton : $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$