

I L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes

1. Définition. Somme et produit de nombres complexes.
2. Plongement de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Forme algébrique d'un nombre complexe. Le nombre i .
3. Module d'un nombre complexe. Inverse et division dans $\mathbf{C}$. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Propriétés des opérations.
5. Propriétés du module. ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Nombres complexes et relation d'ordre.

II Conjugaison dans $\mathbf{C}$

1. Définition du conjugué $\bar{z}$ d'un complexe $z \in \mathbf{C}$.
2. Propriétés du conjugué. ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Expression de z à l'aide de $\bar{z}$. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Expression de $|z|$ à l'aide de z et $\bar{z}$. ($\rightarrow$ *Annexe*)

III L'aspect géométrique des nombres complexes

1. Le plan complexe, l'ensemble $\mathbb{U}$.
2. Arguments d'un complexe non nul, forme trigonométrique.
3. Notation d'Euler, forme exponentielle. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Formules d'Euler et de Moivre. ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Calculs sous forme exponentielle. ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Interprétations géométriques.
7. Liens entre forme algébrique et forme exponentielle. ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Équations dans $\mathbf{C}$

1. Égalités dans $\mathbf{C}$.
2. Équations du second degré dans $\mathbf{C}$.
3. Systèmes somme-produit.
4. Racines n -èmes dans $\mathbf{C}$.

V Applications à la trigonométrie

1. Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
2. Linéarisation.
3. Formule de Fresnel. ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Sommes trigonométriques.

Annexes

1.3 Module, inverse, division :

- Soit $z \in \mathbf{C}$, de forme algébrique $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$). Alors : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Si de plus $z \neq 0$, alors : $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.
- Identité remarquable : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

1.5 Propriétés du module : z, z_1, z_2, z_k désignent des nombres complexes, éventuellement non nuls.

- $|z| \in \mathbf{R}^+$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $\begin{cases} |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \\ |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \end{cases}$
- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$

2.2 Propriétés du conjugué : z, z_1, z_2, z_k désignent des nombres complexes, éventuellement non nuls.

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
- $\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k$
- $\overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

2.3 Expression de z à l'aide de $\bar{z}$: $\forall z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

2.4 Expression du module : $\forall z \in \mathbf{C}, |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ou encore $|z|^2 = z\bar{z}$ ou encore ($z \neq 0$) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

3.3 Forme exponentielle : Soit $z \in \mathbf{C}$ de module $|z| = r \in \mathbf{R}_+$ et admettant un argument $\theta \in \mathbf{R}$. Alors : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

3.4-a Formules d'Euler : $\forall \theta \in \mathbf{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3.4-b Formules de Moivre : $\forall \theta, \theta' \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

3.5 Calculs sous forme exponentielle : Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'} \in \mathbf{C}^*$ sous forme exponentielle.

- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

3.7 Liens entre forme algébrique et forme trigonométrique : Soit $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^*$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = x/r \\ \sin(\theta) = y/r \end{cases}$$

5.3 Formule de Fresnel :

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$. Alors : $\exists r, \varphi \in \mathbf{R}, \forall \theta \in \mathbf{R}, a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi)$.