

**Programme de colles**  
**Semaine 6 du 6/11 au 10/11/2023**

**Chapitre 4 : Logique, ensembles**

- Assertions, valeur de vérité, table de vérité.
- Opérations sur les assertions : négation, et ( $\wedge$ ), ou ( $\vee$ ), implication ( $\Rightarrow$ ), équivalence ( $\Leftrightarrow$ ).
- Quantificateurs : universel, existentiel, d'unicité.
- Cardinal d'un ensemble fini.
- Parties (sous-ensembles) d'un ensemble, ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ .
- Opérations sur les sous-ensembles : complémentaire, intersection, union, inclusion, égalité.
- Produit cartésien d'ensembles.
- Raisonnements par : disjonction de cas, contraposée, l'absurde, récurrence, analyse-synthèse.

**Chapitre 5 : Sommes, produits**

- Notations des sommes et des produits, indices.
- Techniques de changement d'indices.
- Sommes usuelles :  $\sum \lambda$ ,  $\sum k$ ,  $\sum k^2$ ,  $\sum q^k$ .
- Propriété des sommes : linéarité, associativité, télescopages, respect de la relation d'ordre.
- Produits usuels :  $\prod \lambda$ ,  $\prod k$ , fonction factorielle.
- Propriétés des produits : associativité, commutativité, respect de la relation d'ordre sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
- Coefficients binomiaux : définition, valeurs de  $\binom{n}{0}$ ,  $\binom{n}{1}$ ,  $\binom{n}{2}$ .
- Propriétés : symétrie, formule de Pascal, lemme du pion.
- Binôme de Newton.
- Sommes doubles : rectangulaires, triangulaires. Inversion des symboles de sommation.

**Liste des questions de cours :**

1. Formules des sommes usuelles : ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $q \in \mathbf{R}$ ),

$$\sum_{k=1}^n \lambda \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad ; \quad \sum_{k=0}^n q^k \quad (\text{deux cas à distinguer})$$

2. Définir le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ , et énoncer la formule de Pascal.

3. Pour  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  et  $n \in \mathbf{N}$ , développer :  $(a + b)^n$ .

4. **Exercice-type** : Écrire en français :  $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$ .

Écrire en langage symbolique le contraire de cette assertion.

*L'examineur pourra choisir une autre assertion.*

5. **Exercice-type** : Démontrer par récurrence que :  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

6. **Exercice-type** : Exprimer en fonction des entiers  $p, n$  ( $p \leq n$ ) la somme :  $\sum_{k=p}^n (2k^2 - 3k + 1)$ .

**Informatique (en langage Python) :**

1. Déclaration d'une variable : affectation (=)
2. Importations à partir du module `math`.
3. Syntaxe de définition d'une fonction.
4. Boucle `for` ou `while`. Applications aux calculs de sommes ou de produits.
5. Booléens `True`, `False`, comparaisons (`==`, `!=`, `>`, `>=`, `<`, `<=`), tests.
6. Listes, chaînes de caractères et tuples. Indexation, extraction, concaténation.

Mots clés à connaître : `from import as def return for while if elif else`

Fonctions à connaître : `range len append`

*Exemples de questions pouvant être posées par l'examineur :*

\* Écrire une fonction renvoyant la liste  $[1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3]$ .

\* Écrire une fonction d'arguments une liste L et un flottant M, et renvoyant le nombre d'éléments de L compris entre  $-M$  et  $M$ .

\* Écrire une fonction renvoyant :  $\sum_{k=1}^n \ln(k+1) \cos(k)$ .

\* Définir la fonction factorielle.

\* Écrire une fonction renvoyant :  $\sum_{1 \leq k e^k \leq n} \sin(k)$ .

*Bonnes vacances à tous !*