Corrigé du DM n°2

Exercice 1 : valeurs particulières de cos

1. $\omega^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{\frac{5\times 2i\pi}{5}} = e^{2i\pi} = 1.$ $\boxed{\omega^5 = 1.}$

   $S = \sum_{k=0}^{4} \omega^k$ est une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$ $\boxed{S = 0.}$

2. Par périodicité de la fonction cos : $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$.

   Par parité de cos : $\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ainsi : $\boxed{\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$

   De même : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. $S = 0$ s'écrit aussi : $1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 0$.
   En considérant les parties réelles : $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$

   D'après **2**, on a : $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$, ce qui conduit à $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}}$

4. $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$. On pose : $a = \frac{4\pi}{5}$ et $b = \frac{2\pi}{5}$.

   Il vient : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$

   donc, vu ce qui précède, $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}}$

5. Le système est un système somme-produit. u et v sont donc les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, où S est la somme $-\frac{1}{2}$ et P le produit $-\frac{1}{4}$.

   Soit $(E) : x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, de discriminant $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} > 0$.

   L'équation (E) admet donc deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{2 \times 1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

   Les couples (u, v) solutions du système proposé sont : $\boxed{(u,v) = (x_1, x_2) \text{ et } (u,v) = (x_2, x_1)}$.

6. Les questions **3** et **4** prouvent que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont des solutions u et v du système.

   Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$

Exercice 2 : Un calcul de somme

1. **Informatique**

```
def somme(n) :
    S = 0
    for k in range(1, n+1) :
        S = S + k * 2**k
    return S
```

2. **Calcul à l'aide d'une somme double**

(a) $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{i=1}^{k} 2^k = k2^k$ (somme de constantes) donc : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k = S_n.}$

(b) Dans la somme précédente, $k \in [\![1,n]\!]$ et $i \in [\![1,k]\!]$, donc $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$.

On peut donc écrire, en inversant l'ordre de sommation : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a après factorisation par 2^i :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} 2^k = 2^i \sum_{k=i}^{n} 2^{k-i} &= 2^i \sum_{k=0}^{n-i} 2^k && \text{(après glissement d'indice)}\\
&= 2^i \times \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} && \text{(somme géométrique de raison } \neq 1)\\
&= 2^i(2^{n+1-i}-1)\\
&= 2^{n+1} - 2^i
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{i=1}^{n}(2^{n+1}-2^i).}$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Par linéarité des sommes : $S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i$.

La première somme est une somme de constantes, et la deuxième est une somme géométrique.

On a donc : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = n2^{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = n2^{n+1} - 2(2^n-1) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.}$

3. **Détermination de S_n par récurrence**

• Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}_n$: « $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ ».

• Initialisation au rang $n = 1$:

D'une part, $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k2^k = 1 \times 2^1 = 2$, et d'autre part $(1-1)2^{1+1} + 2 = 2$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• Hérédité à partir du rang $n = 1$:

Soit $n \geqslant 1$, et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} && \text{(en séparant le terme d'indice } k = n+1)\\
&= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2\\
&= 2n \times 2^{n+1} + 2\\
&= n2^{n+2} + 2 && \text{donc } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

• Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang $n = 1$ et héréditaire à partir du rang $n = 1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

* * *