Exercice 1 : Coefficients binomiaux

1. (a)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

(b) $S_4 = \dfrac{(-1)^2}{1}\dbinom{4}{1} + \dfrac{(-1)^3}{2}\dbinom{4}{2} + \dfrac{(-1)^4}{3}\dbinom{4}{3} + \dfrac{(-1)^5}{4}\dbinom{4}{4}$
$= 4 - 3 + \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}(12+16-3) = \dfrac{25}{12}$

(c) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}(12+6+4+3) = \dfrac{25}{12}$ donc $\boxed{S_4 = \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}.}$

2. (a) $\dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k-1} = \dfrac{1}{k} \times \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{n!}{k!(n+1-k)!}$ mais $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$

donc $\dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k-1} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$ soit : $\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.}$

(b) Soit $n \geqslant 1$. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{n+1}\binom{n+1}{k}$ d'après **2(a)**.

Ainsi, $T_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}$ et on reconnaît une somme de Newton, à laquelle il manque le premier terme ($k=0$), valant 1.

Conclusion : $T_n = \dfrac{1}{n+1}\left((1-1)^{n+1} - 1\right)$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ T_n = -\frac{1}{n+1}.}$

3. (a) Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right) + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\binom{n+1}{n+1}$$

Mais d'après la formule de Pascal : $\dbinom{n+1}{k} - \dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{k-1}$, donc :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

Mais $\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}\dbinom{n}{n}$ donc correspond au terme $k = n+1$ de la somme. On a donc :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k}}{k}\binom{n}{k-1} = -T_n$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_{n+1} - S_n = -T_n.}$

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{P}_n : S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

• Initialisation pour $n = 1$: $S_1 = \dfrac{(-1)^2}{1}\dbinom{1}{1} = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = 1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• Hérédité : soit $n \geqslant 1$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

Alors $S_{n+1} = S_n - T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ d'après **2(b)**, **3(a)** et $\mathcal{P}_n$.

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}_n$ vraie. $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$

Exercice 2 : Relation entre deux sommes

1. (a) $\forall n \geqslant 1,\ b_n = n(a_n - a_{n+1}) = n(n^2 - (n+1)^2) = n(n^2 - n^2 - 2n - 1)$ $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ b_n = -2n^2 - n.}$

   (b) $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2$: d'après le cours, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ A_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$

   $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(-2k^2 - k) = -2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$ par linéarité.

   D'après le cours : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ B_n = -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \dfrac{n(n+1)}{2}.}$

   (c) Soient $1 \leqslant p < q$ des entiers. On a :

   $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_n}{n(n+1)} = \sum_{n=p}^{q-1} \left(-\dfrac{2n+1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}\sum_{n=p}^{q-1} n - \sum_{n=p}^{q-1}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right)$ par linéarité.

   On reconnaît deux sommes usuelles : $S_{p,q} = -\dfrac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{q-1} n - \sum_{n=1}^{p-1} n\right) - \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{5}{6}$

   donc $S_{p,q} = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{(q-1)q}{2} - \dfrac{(p-1)p}{2}\right) - \dfrac{5}{6}(q-p)$

   $= -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{q^2}{2} - \dfrac{p^2}{2}\right) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{q}{2} - \dfrac{p}{2}\right) - \dfrac{5}{6}(q-p) = \dfrac{p^2 - q^2}{3} + (p-q)\left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{6}\right)$

   Conclusion : $\boxed{S_{p,q} = \dfrac{p^2 - q^2}{3} + \dfrac{p-q}{2}.}$

   (d) $\dfrac{A_p}{p} - \dfrac{A_q}{q} = \dfrac{(p+1)(2p+1)}{6} - \dfrac{(q+1)(2q+1)}{6} = \dfrac{2p^2 + 3p + 1 - (2q^2 + 3q + 1)}{6}$

   donc $\dfrac{A_p}{p} - \dfrac{A_q}{q} = \dfrac{p^2 - q^2}{3} + \dfrac{p-q}{2}$ soit : $\boxed{S_{p,q} = \dfrac{A_p}{p} - \dfrac{A_q}{q}.}$

2. (a) La commande `L[n]` renvoie le terme d'indice n de la liste L, c'est-à-dire a_n.

   (b) `def b(n,L) : return n*(L[n]-L[n+1])`

   (c)
```
def A(n,L) :
    s = 0
    for k in range(1,n+1) :
        s += L[k]
    return s
```

   (d)
```
def S(p,q,L) :
    s = 0
    for n in range(p,q) :
        s += B(n,L)/(n*(n+1))
    return s
```

   (e)
```
def differences(q,L) :
    D,A = [],A(q,L)/q
    for p in range(1,q) :
        d = S(p,q,L) - (A(p,L)/p - A)
        D.append(d)
    return D
```

3. (a) Soient $1 \leqslant p < q$ des entiers. $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_n}{n(n+1)} = \sum_{n=p}^{q-1} B_n \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ donc par linéarité :

   $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_n}{n} - \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_n}{n+1}$ mais $B_n = B_{n+1} - b_{n+1}$ donc $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_n}{n} - \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_{n+1} - b_{n+1}}{n+1}$

   Ainsi : $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_n}{n} - \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{B_{n+1}}{n+1} + \sum_{n=p}^{q-1} \dfrac{b_{n+1}}{n+1}$

   On repère un télescopage dans les deux premières sommes, et on effectue un glissement d'indices dans la troisième somme : $\boxed{S_{p,q} = \dfrac{B_p}{p} - \dfrac{B_q}{q} + \sum_{n=p+1}^{q} \dfrac{b_n}{n}.}$

(b) Par définition, $\forall n \in [\![p+1, q]\!]$, $\dfrac{b_n}{n} = a_n - a_{n+1}$ donc : $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} \frac{b_n}{n} = \sum_{n=p+1}^{q} (a_n - a_{n+1})$.

Après un nouveau télescopage : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} \frac{b_n}{n} = a_{p+1} - a_{q+1}.}$

(c) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{Q}_n : B_n = A_n - na_{n+1}$.

• Initialisation pour $n = 1$: $B_1 = b_1 = 1 \times (a_1 - a_2) = a_1 - a_2$
et $A_1 - 1 \times a_2 = a_1 - a_2$ donc $\mathcal{Q}_1$ vraie.

• Hérédité : soit $n \geqslant 1$, on suppose $\mathcal{Q}_n$ vraie.

Alors $B_{n+1} = B_n + b_{n+1} = A_n - na_{n+1} + (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2})$ d'après $\mathcal{Q}_n$
$= A_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+2} = A_{n+1} - (n+1)a_{n+2}$ donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

• D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{Q}_n$ vraie : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ B_n = A_n - na_{n+1}.}$

(d) $S_{p,q} = \dfrac{B_p}{p} - \dfrac{B_q}{q} + \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} \frac{b_n}{n}$ d'après **3(a)**

$= \dfrac{B_p}{p} - \dfrac{B_q}{q} + a_{p+1} - a_{q+1}$ d'après **3(b)**

$= \dfrac{A_p - p.a_{p+1}}{p} - \dfrac{A_q - q.a_{q+1}}{q} + a_{p+1} - a_{q+1}$ d'après **3(c)**

$= \dfrac{A_p}{p} - a_{p+1} - \dfrac{A_q}{q} + a_{q+1} + a_{p+1} - a_{q+1}$ ainsi : $\boxed{S_{p,q} = \dfrac{A_p}{p} - \dfrac{A_q}{q}.}$

Exercice 3 : Étude d'une fonction de la variable complexe

1. φ est définie en $z \in \mathbf{C}$ tel que : $z - 1 \neq 0$, donc $\boxed{\mathcal{D}_\varphi = \mathbf{C} \setminus \{1\}.}$
2. (a) Il faut additionner les parties réelles (éléments d'indice 0) et imaginaires (éléments d'indice 1).

```
def somme(z1,z2) :
    [a,b] = z1
    [c,d] = z2
    return [a+c,b+d]
```

   (b) On utilise la formule : $(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$.

```
def produit(z1,z2) :
    [a,b] = z1
    [c,d] = z2
    return [a*c-b*d,a*d+b*c]
```

   (c)
```
def phi(z) :
    N = produit(z,z)
    D = somme(z,[-1,0])    # [-1,0] est la liste représentant le réel −1
    return produit(N, inverse(D))
```

3. $\varphi(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{1+i\sqrt{3}-1} = \dfrac{1-3+2i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \dfrac{2i+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ donc $\boxed{\varphi(1+i\sqrt{3}) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}i}$

   et $\varphi(1+i\sqrt{3}) = \varphi(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{i\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{2\pi}{3} - i\frac{\pi}{2}}$ donc $\boxed{\varphi(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}.}$

4. On résout dans $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ l'équation : $\varphi(z) = 2$: $\dfrac{z^2}{z-1} = 2 \Leftrightarrow z^2 = 2(z-1) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$.

   On a une équation du second degré, de discriminant $\Delta = -4 < 0$.

   Elle possède donc 2 solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$.

   $\boxed{\text{L'équation } \varphi(z) = 2 \text{ possède deux solutions : } 1+i \text{ et } 1-i.}$

5. (a) $z \in \mathcal{D}_\varphi \Leftrightarrow z \neq 1 \Leftrightarrow z \neq e^{i0} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ à 2π près.

   (b) $e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = e^{i\alpha} - e^0 = e^{i\alpha} - 1.$

   (c) Soit $z = e^{i\alpha}$. Alors $\varphi(z) = \dfrac{\left(e^{i\alpha}\right)^2}{e^{i\alpha}-1} = \dfrac{e^{2i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}$.

   Vu ce qui précède, et d'après la formule d'Euler : $e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$, donc :

   $\varphi(z) = \dfrac{e^{2i\alpha}}{2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{e^{2i\alpha}\,e^{-i\frac{\alpha}{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$, soit : $\boxed{\varphi(z) = \dfrac{e^{\frac{i}{2}(3\alpha-\pi)}}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}}$.

6. Soit $z = 1 + e^{i\theta}$. Alors $\varphi(z) = \dfrac{(1+e^{i\theta})^2}{1+e^{i\theta}-1} = e^{-i\theta}\left(1 + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}\right) = e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta}$.

   D'après la formule d'Euler : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ donc on obtient : $\boxed{\varphi(z) = 2 + 2\cos\theta \in \mathbf{R}.}$

7. (a) $\varphi(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \varphi(z) = \overline{\varphi(z)} \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{z-1} = \dfrac{\overline{z}^2}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z^2(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$

   $\Leftrightarrow z^2\overline{z} - z^2 = \overline{z}^2 z - \overline{z}^2$

   $\Leftrightarrow z^2(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$

   (b) On sait que $\forall z \in \mathbf{C},\ z\overline{z} = |z|^2 = r^2$ donc

   $\varphi(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z(z\overline{z} - z) = \overline{z}(z\overline{z} - \overline{z})$

   $\Leftrightarrow z(r^2 - z) = \overline{z}(r^2 - \overline{z})$

   (c) On injecte $z = a + ib$, $\overline{z} = a - ib$ dans la relation précédente :

   $z(r^2 - z) = \overline{z}(r^2 - \overline{z}) \Leftrightarrow (a+ib)r^2 - z^2 = (a-ib)r^2 - \overline{z}^2 \Leftrightarrow ar^2 + ibr^2 - z^2 = ar^2 - ibr^2 - \overline{z}^2$

   $\Leftrightarrow 2ibr^2 = z^2 - \overline{z}^2 = (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 2ib \times 2a = 4iab \Leftrightarrow \boxed{br^2 = 2ab.}$

   (d) $(a-1)^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a$, et $r^2 = a^2 + b^2$ donc $\boxed{r^2 = 2a \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1.}$

   (e) $br^2 = 2ab \Leftrightarrow b = 0$ ou $r^2 = 2a$.

   • Si $b = 0$, alors $z \in \mathbf{R}$

   • Si $b \neq 0$, alors $\varphi(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow r^2 = 2a \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1$.

   On pose $z' = z - 1$. On a : $z' = (a-1) + ib$ donc $|z'|^2 = (a-1)^2 + b^2 = 1$.

   Ainsi, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que : $z' = e^{i\theta}$ donc $z = 1 + z' = 1 + e^{i\theta}$.

   En conclusion : $\boxed{\forall z \neq 1,\ \varphi(z) \in \mathbf{R} \text{ si et seulement si } z \in \mathbf{R}\setminus\{1\} \text{ ou } z = 1 + e^{i\theta} \text{ avec } \theta \in \mathbf{R}.}$