Corrigé du DM n°3

Exercice 1 : Un système linéaire à paramètre

1. Écriture sous forme matricielle : $(S_m) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -m & m+2 \\ 1 & -m & 2 & m-2 \\ m-1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

2. Échelonnement de (S_m) : on applique l'algorithme du pivot de Gauss, en utilisant comme premier pivot le coefficient ligne 1, colonne 2 :

$$(S_m) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + mL_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & -m & m+2 \\ 1-m & 0 & 2-m^2 & m^2+3m-2 \\ m-1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$(S_m) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & -m & m+2 \\ 0 & 0 & 4-m^2 & m^2+3m+2 \\ m-1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

3. Résolution et rang de (S_m).

$\star$ <u>Premier cas : $m-1=0$, soit : $m=1$</u>

Alors $(S_1) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(S_1) possède deux pivots ($r=2$) et une équation auxiliaire vérifiée ($n-r=1$).
Son degré de liberté est $p-r=1$: il y a une variable libre.
$\boxed{(S_1) \text{ est de rang 2 et } \mathcal{S}_1 = \{(x, x+5, 2),\ x \in \mathbf{R}\}}$.

$\star$ <u>Deuxième cas : $4-m^2=0$, soit : $m=2$ ou $m=-2$</u>
$\star\star$ Premier sous-cas : $m=2$.

$(S_2) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ (S_2) incompatible (équation auxiliaire non vérifiée).
$\boxed{\mathrm{rg}(S_2) = 2 \text{ et } \mathcal{S}_2 = \varnothing}$.

$\star\star$ Deuxième sous-cas : $m=-2$.

$(S_{-2}) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ (S_{-2}) est de rang 2 avec une équation auxiliaire vérifiée. Son degré de liberté est 1 : il y a une variable libre. $\boxed{\mathrm{rg}(S_{-2}) = 2 \text{ et } \mathcal{S}_{-2} = \left\{\left(\frac{2z-4}{3}, \frac{-4z-4}{3}, z\right),\ z \in \mathbf{R}\right\}}$.

$\star$ <u>Troisième cas : $m \neq 1, m \neq 2$ et $m \neq -2$</u>
Alors (S_m) possède 3 pivots : $n=p=r=3$ donc (S_m) est de Cramer. Il a une unique solution.

$$(S_m) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & -m & m+2 \\ 0 & 0 & \boxed{4-m^2} & m^2+3m+2 \\ \boxed{m-1} & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$L_2 \Rightarrow z = \dfrac{m^2+3m+2}{4-m^2} = \dfrac{(m+1)(m+2)}{(2-m)(2+m)} = \dfrac{m+1}{2-m}$.

$L_3 \Rightarrow x = \dfrac{-2z+4}{m-1} = \dfrac{-2m-2+4(2-m)}{(m-1)(2-m)} = \dfrac{6(1-m)}{(m-1)(2-m)} = \dfrac{6}{m-2}$.

$L_1 \Rightarrow y = x+mz+m+2 = \dfrac{6}{m-2} + \dfrac{m(m+1)}{2-m} + \dfrac{(m+2)(m-2)}{m-2} = \dfrac{6-m(m+1)+(m+2)(m-2)}{m-2} = -1$.

Conclusion : $\boxed{\forall m \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, -2\},\ \mathrm{rg}(S_m) = 3 \text{ et } \mathcal{S}_m = \left\{\left(\frac{6}{m-2}\ ,\ -1\ ,\ \frac{m+1}{2-m}\right)\right\}}$

Exercice 2 : Séries alternées

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ On reconnaît une somme géométrique de raison $-\frac{1}{2} \neq 1$.

   $\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = \frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{2})}$ $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).}$

   $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par opérations : $\boxed{\lim S_n = \frac{2}{3}.}$

2. $S_0 = (-1)^0 u_0 = u_0$, $S_2 = (-1)^0 u_0 + (-1)^1 u_1 + (-1)^2 u_2 = u_0 - u_1 + u_2$ et de même $S_4 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

   $S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}$ après télescopage

   $2n+1$ est impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$ et $2n+2$ est pair donc $(-1)^{2n+2} = 1$.

   Il reste donc : $S_{2n+2} - S_{2n} = -u_{2n+1} + u_{2n+2}$.

   Or, la suite (u_n) est décroissante, donc $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+1}$.

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ S_{2n+2} - S_{2n} \leqslant 0.}$

4. On calcule de même $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}$

   $= -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$

   donc $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$

5. D'après les questions **3.** et **4.** (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) est croissante.

   On calcule : $S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1}$

   On sait que la suite (u_n) converge vers 0 donc $\lim(-u_{2n+1}) = 0$, donc $\lim(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

   Par définition, $\boxed{(S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ sont adjacentes.}}$

6. D'après le théorème des suites adjacentes, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent, et ont même limite.

   D'après le théorème des suites extraites de rangs pairs et impairs, $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ converge.}}$

7. Si n est pair, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p$.

   On sait que : $\forall p \in \mathbf{N},\ S_{2p+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2p}$ donc $\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } S_{n+1} \leqslant \ell \leqslant S_n.}$

   De même $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } S_n \leqslant \ell \leqslant S_{n+1}.}$

8. D'après la question précédente, quelle que soit la parité de n, on a : $|\ell - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n|$.

   Or, $|S_{n+1} - S_n| = |(-1)^{n+1} u_{n+1}| = u_{n+1}$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ |\ell - S_n| \leqslant u_{n+1}.}$

9. (a)
```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [ k for k in range(101) ]
Y = [ (-1)**k / (k+1) for k in X ]
plt.plot(X,Y,'.')
plt.show()
```
   (b)
```
def somme(n) :
    s = 0
    for k in range(n+1) : s += (-1)**k / (k+1)
    return s
```
   (c)
```
def limite(epsilon) :
    s,k = 0,0
    while 1/(k+1) > epsilon :
        s += (-1)**k / (k+1)
        k = k+1
    return s
```
   (d) `>>> limite(10**(-5))` renvoie `0.6931521805849815`

   `>>> limite(10**(-5))/log(2)` renvoie `1.000007213511324`

   Soit une différence relative d'environ 0,0007%