Corrigé du DM n°4

Étude d'une suite récurrente d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = -1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2^n$$

1. **Traitement informatique**

(a)
```
def u(n) :
    u0, u1, u2 = 0 , 2 , -1
    for k in range(n) :
        u3 = 2*u2 + 5*u1 - 6*u0 + 2**k
        u0 = u1
        u1 = u2
        u2 = u3
    return u0
```

(b) Pour $n \geqslant 3$, on a : $u_n = 2u_{n-1} + 5u_{n-2} - 6u_{n-3} + 2^{n-3}$.

(c)
```
def u_rec(n) :
    if n == 0 : return 0
    if n == 1 : return 2
    if n == 2 : return -1
    return 2*u_rec(n-1) + 5*u_rec(n-2) - 6*u_rec(n-3) + 2**(n-3)
```

(d) `u_rec` s'appelle elle-même 3 fois. Pour calculer u_{100}, il faudra de l'ordre de 3^{100} calculs pour obtenir une réponse.
La fonction `u` n'effectuera qu'une centaine de calculs (boucle de taille 100).
Ainsi, la fonction `u` est largement préférable à `u_rec`.

2. $v_0 = u_1 - u_0 = 2$ et $v_1 = u_2 - u_1 = -3$.
Pour $n \in \mathbf{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} - u_{n+2} \\ &= 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2^n - u_{n+2} \\ &= u_{n+2} - u_{n+1} + 6u_{n+1} - 6u_n + 2^n \\ &= v_{n+1} + 6v_n + 2^n \quad (\mathcal{R}) \end{aligned}$$

3. Soit (w_n) géométrique de raison 2 : $\forall n \in \mathbf{N},\ w_n = w_0 \times 2^n$.
Alors (w_n) vérifie $(\mathcal{R})$ si et seulement si :
$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbf{N},\ w_{n+2} = w_{n+1} + 6w_n + 2^n \\ \Leftrightarrow\ &\forall n \in \mathbf{N},\ w_0 2^{n+2} = w_0 2^{n+1} + 6w_0 2^n + 2^n \\ \Leftrightarrow\ &\forall n \in \mathbf{N},\ 4w_0 = 2w_0 + 6w_0 + 1 \\ \Leftrightarrow\ &\forall n \in \mathbf{N},\ w_0 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$
La seule suite géométrique de raison 2 vérifiant $(\mathcal{R})$ est celle de premier terme $w_0 = -\dfrac{1}{4}$.

4. (a) $x_0 = v_0 - w_0 = \dfrac{9}{4}$ et $x_1 = v_1 - w_1 = -\dfrac{5}{2}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = (v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n) - (w_{n+2} - w_{n+1} - 6w_n) = 2^n - 2^n = 0$.

$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : } \forall n \geqslant 0,\ x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0.}$

(b) L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est : $r^2 - r - 6 = 0$,
de discriminant $\Delta = 25 > 0$, donc elle possède 2 solutions réelles distinctes : $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$.
On sait alors qu'il existe des constantes A, B telles que : $\forall n \in \mathbf{N},\ x_n = A(-2)^n + B.3^n$.

$x_0 = \dfrac{9}{4}$ et $x_1 = -\dfrac{5}{2}$ permettent d'écrire : $\begin{cases} A + B = \frac{9}{4} \\ -2A + 3B = -\frac{5}{2} \end{cases}$ d'où : $A = \dfrac{37}{20}$ et $B = \dfrac{2}{5}$.

On a donc : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ x_n = \dfrac{37}{20}(-2)^n + \dfrac{2}{5} \times 3^n.}$

Enfin, $v_n = x_n + w_n$ donc : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \dfrac{37}{20}(-2)^n + \dfrac{2}{5} \times 3^n - 2^{n-2}.}$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n - u_0$ (somme téléscopique).

   Puisque $u_0 = 0$, il reste : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.}$

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{37}{20}(-2)^k + \frac{2}{5}.3^k - 2^{k-2}\right) = \frac{37}{20}\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^k + \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n-1}3^k - \sum_{k=0}^{n-1}2^{k-2}$

   On reconnaît trois sommes géométriques, de raisons différentes de 1.

   $u_n = \frac{37}{20}\times\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} + \frac{2}{5}\times\frac{1-3^n}{1-3} - \frac{1}{4}\times\frac{1-2^n}{1-2}$ $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{2}{3} - \frac{37}{60}(-2)^n + \frac{3^n}{5} - 2^{n-2}.}$

   remarque : cette formule est encore vraie pour $n = 0$.

7. Soit $a \in]-3, 3[$. On a alors $\left|\frac{a}{3}\right| < 1$ donc $\lim \left(\frac{a}{3}\right)^n = 0$.

8. $(-2)^n$ et 2^n sont négligeables devant 3^n car $\frac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$ (question précédente avec $a = -2$)

   et de même $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$. De plus, on a évidemment : $\frac{2}{3} = \mathrm{o}(3^n)$.

   Ainsi, $u_n = \mathrm{o}(3^n) + \mathrm{o}(3^n) + \frac{3^n}{5} + \mathrm{o}(3^n)$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{5}\times 3^n.}$

* * *