Corrigé du DS n°4

Exercice 1 : Un système linéaire

1) Cas où $a = 0$: $(S_0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_1 \leftarrow -L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$(S_0) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\boxed{\mathrm{rg}(S_0) = 2}$ donc $\boxed{(S_0) \text{ n'est pas de Cramer.}}$

Il possède $n - r = 1$ équation auxiliaire vérifiée, donc il est compatible.
Il y a $p - r = 1$ variable libre.
$L_1 \Rightarrow y = z - 1$ et $L_2 \Rightarrow x = z - 1$. Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_0 = \{(z-1, z-1, z),\ z \in \mathbf{R}\}.}$

2) Cas général : $(S_a) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 1-a^2 \\ \boxed{1} & a & -1 & a^2-1 \\ 1 & -1 & a & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - aL_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1-a^2 & 1+a & -a^3-a^2+a+1 \\ \boxed{1} & a & -1 & a^2-1 \\ 0 & -1-a & 1+a & 1-a^2 \end{array}\right)$

$(S_a) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1-a^2 & 1+a & -a^3-a^2+a+1 \\ \boxed{1} & a & -1 & a^2-1 \\ 0 & a^2-a & 0 & a^3-a \end{array}\right)$

• 1er cas : $a^2 - a \neq 0$ et $1 + a \neq 0$, donc $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Alors $\boxed{\mathrm{rg}(S_a) = 3 \text{ donc } (S_a) \text{ est de Cramer.}}$
On résout par remontée :
$L_3 \Rightarrow (a^2 - a)y = a^3 - a \Rightarrow y = \dfrac{a^3 - a}{a^2 - a} = \dfrac{a(a-1)(a+1)}{a(a-1)} = a + 1$

$L_1 \Rightarrow (-1 - a^2)y + (1 + a)z = -a^3 - a^2 + a + 1 \Rightarrow (1 + a)z = -a^3 - a^2 + a + 1 + (1 + a^2)(a + 1) = 2(a + 1)$
$\Rightarrow z = \dfrac{2(a+1)}{a+1} = 2$

$L_2 \Rightarrow x + ay - z = a^2 - 1 \Rightarrow x = -ay + z + a^2 - 1 = -a(a + 1) + 2 + a^2 - 1 = 1 - a$

$\boxed{\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, -1\},\ \mathcal{S}_a = \{(1 - a, 1 + a, 2)\}.}$

• 2ème cas : $a = 0$ déjà fait (question 1)

• 3ème cas : $a = 1$ $(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{-2} & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\boxed{\mathrm{rg}(S_1) = 2 \text{ et } (S_1) \text{ est compatible.}}$

$L_1 \Rightarrow -2y + 2z = 0 \Rightarrow y = z$ et $L_2 \Rightarrow x + y - z = 0 \Rightarrow x = 0.$ $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{(0, z, z),\ z \in \mathbf{R}\}.}$

• 4ème cas : $a = -1$ $(S_{-1}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\boxed{\mathrm{rg}(S_{-1}) = 2 \text{ et } (S_{-1}) \text{ est compatible.}}$

$L_1 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$ et $L_2 \Rightarrow x - y - z = 0 \Rightarrow x = z.$ $\boxed{\mathcal{S}_{-1} = \{(z, 0, z),\ z \in \mathbf{R}\}.}$

Exercice 2 : Évolution d'un système à deux états

1. Au jour $(n + 1)$, les malades sont ceux qui étaient malades au jour n et n'ont pas guéri, en proportion $1 - \alpha$, et les personnes saines au jour n qui sont tombées malade, en proportion β.
Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M_{n+1} = (1 - \alpha)M_n + \beta S_n.}$

2. Puisque $S_n = N - M_n$, on obtient $M_{n+1} = (1-\alpha)M_n + \beta(N - M_n)$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)M_n + \beta N.}$

3a.
```
def evolution(α,β,N,Mn) :
        return (1-α-β)*Mn + β*N
```

3b.
```
def listeMalades(α,β,N,M0,n) :
        L = [M0]
        for _ in range(n) :
            Mn = L[-1]
            L.append(evolution(α,β,N,Mn)
        return L
```

3c.
```
import matplotlib.pyplot as plt
    α,β,N,M0,n = 10**(-1), 10**(-5), 10**7, 10**4, 20
    X = [k for k in range(n+1)]
    Y = listeMalades(α,β,N,M0,n)
    plt.plot(X,Y,'.')
    plt.show()
```

3d.
```
def guerison() :
        α,β,N,M0,n = 10**(-1), 10**(-5), 10**7, 10**4, 0
        while M0 >= 2000 :
            M0 = evolution(α,β,N,M0)
            n = n + 1
        return n
```

4. D'après la question 2, $\forall n \in \mathbf{N}$, $M_{n+1} = aM_n + b$ avec $a = 1 - \alpha - \beta$ et $b = \beta N$, donc $\boxed{(M_n) \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$

5. On pose $\ell = (1-\alpha-\beta)\ell + \beta N$. On résout : $\boxed{\ell = \dfrac{\beta N}{\alpha+\beta}.}$

On pose $v_n = M_n - \ell$: la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1-\alpha-\beta$.
On a donc : $\forall n \geqslant 0,\ v_n = v_0 \times q^n = (M_0 - \ell)(1-\alpha-\beta)^n$.
On obtient finalement : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ M_n = (M_0-\ell)(1-\alpha-\beta)^n + \ell.}$

6. $\alpha, \beta \in]0,1[$ donc $\alpha+\beta \in]0,2[$ et $1-\alpha-\beta \in]-1,1[$. Ainsi, $\boxed{\lim (1-\alpha-\beta)^n = 0.}$

7. Par opérations, $\boxed{\lim M_n = \ell = \dfrac{\beta N}{\alpha+\beta}.}$

Exercice 3 : Limites de suites

1. $n^2 + \sqrt{n} \sim n^2$ et $n + \ln(n) \sim n$ donc par quotient : $\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n+\ln(n)} \sim \dfrac{n^2}{n} = n$.

$2n + \cos(n) \sim 2n$ et $3n^2 + 1 \sim 3n^2$ donc par quotient : $\dfrac{2n+\cos(n)}{3n^2+1} \sim \dfrac{2n}{3n^2} = \dfrac{2}{3n} \longrightarrow 0$

On sait que $\sin(t) \sim t$ lorsque $t \longrightarrow 0$ donc $\sin\left(\dfrac{2n+\cos(n)}{3n^2+1}\right) \sim \dfrac{2n+\cos(n)}{3n^2+1} \sim \dfrac{2}{3n}$

Par produit : $u_n \sim n \times \dfrac{2}{3n} = \dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{\lim u_n = \dfrac{2}{3}.}$

2. On utilise la forme exponentielle : $v_n = \exp\left(2n \times \ln\left(1 + \dfrac{n+2}{3n^2+1}\right)\right)$

$\dfrac{n+2}{3n^2+1} \sim \dfrac{n}{3n^2} = \dfrac{1}{3n} \longrightarrow 0$ et on sait que $\ln(1+t) \sim t$ lorsque $t \longrightarrow 0$

donc $\ln\left(1+\dfrac{n+2}{3n^2+1}\right) \sim \dfrac{n+2}{3n^2+1} \sim \dfrac{1}{3n}$. Par produit : $2n \times \ln\left(1+\dfrac{n+2}{3n^2+1}\right) \sim 2n \times \dfrac{1}{3n} = \dfrac{2}{3} \longrightarrow \dfrac{2}{3}$.

Par composée **de limites** : $\exp\left(2n \times \ln\left(1+\dfrac{n+2}{3n^2+1}\right)\right) \longrightarrow e^{\frac{2}{3}}$. Donc $\boxed{\lim v_n = e^{\frac{2}{3}}.}$

Exercice 4 : Étude d'une vitesse de convergence

1. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $u_n \geqslant 1$ ».
Initialisation : $u_0 = 1$ d'après l'énoncé, donc : $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose $u_n \geqslant 1$. On a : ${u_n}^2 + \dfrac{1}{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{1}{2^n} \geqslant 1$.
Donc : $\sqrt{{u_n}^2 + \dfrac{1}{2^n}} \geqslant 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant 1.}$

2. Soit $n \geqslant 0$. ${u_{n+1}}^2 = {u_n}^2 + \dfrac{1}{2^n} \geqslant u_n^2$ et la suite (u_n) étant positive, $u_{n+1} \geqslant u_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

3.
```
def u(n) :
    if n == 0 : return 1
    return (u(n-1)**2 + 1/2**(n-1))**0.5
```

4. (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Par définition de la suite (u_n), on a : $v_{k+1} = {u_{k+1}}^2 = {u_k}^2 + \dfrac{1}{2^k} = v_k + \dfrac{1}{2^k}$.
Donc $\boxed{\forall\, k \in \mathbf{N},\ v_{k+1} - v_k = \dfrac{1}{2^k}.}$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 = v_n - 1$.
D'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2^{1-n}.$$
En égalisant les deux résultats trouvés, on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ v_n = 3 - 2^{1-n}.}$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Étant donné que $u_n \geqslant 1 \geqslant 0$, on a : $u_n = \sqrt{v_n}$ (et non $u_n = -\sqrt{v_n}$).
Donc $\boxed{\forall\, n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \sqrt{3 - 2^{1-n}}}$ et on remarque que cette formule est encore vraie pour $n = 0$.

(d) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{1-n} = 0$, donc (u_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}.}$

5. $\forall n \geqslant 1,\ \ell^2 - v_n = (\ell - u_n)(\ell + u_n)$ donc $\ell - u_n = \dfrac{\ell^2 - v_n}{\ell + u_n}$.
Or $\ell^2 - v_n = 2^{1-n}$ et $u_n \sim \sqrt{3}$ donc $\boxed{\ell - u_n \sim \dfrac{2^{1-n}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2^n\sqrt{3}}.}$

6. (a)
```
def moyenne(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + u(k)
    return s/n
```

(b) La suite (u_n) étant croissante, chacun de ses termes est inférieur à sa limite d'où :
$\forall k \in \mathbf{N},\ \ell - u_k \geqslant 0$. Par ailleurs, $\ell - u_k = \dfrac{\ell^2 - v_k}{\ell + u_k} = \dfrac{2^{1-k}}{\sqrt{3} + u_k} \leqslant \dfrac{2^{1-k}}{\sqrt{3}+1}$ car $u_k \geqslant 1$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\quad 0 \leqslant \ell - u_k \leqslant \dfrac{2^{1-k}}{\sqrt{3}+1}.}$

(c) Soit $n \geqslant 1$. $w_{n+1} - w_n = \ell - u_n$ par télescopage,
donc $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ d'après la question précédente. Ainsi, $\boxed{(w_n) \text{ est croissante.}}$
Par ailleurs, $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\ell - u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-k}}{1+\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}+1}$.
$\boxed{(w_n) \text{ est majorée par } \dfrac{4}{\sqrt{3}+1}.}$

(d) (w_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

On calcule : $w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ell - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\ell - n.m_n$

Donc : $\forall n \geqslant 1,\ m_n = \dfrac{n\ell - w_n}{n} = \ell - \dfrac{w_n}{n}$.

(w_n) converge donc $\dfrac{w_n}{n} \longrightarrow 0$. Par opérations : $\boxed{(m_n) \text{ converge vers } \ell.}$