Devoir Maison n°5

Résolution d'un système de relations de récurrences linéaires par méthode matricielle

On considère les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ définies par : $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$(1) \qquad \forall n \geqslant 0, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 3v_n + 8w_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 4v_n + 14w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 4w_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose C_n la matrice-colonne : $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

1. Préciser la matrice C_0.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 4 & -4 & 14 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

   Montrer que : $(1) \Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ C_{n+1} = AC_n$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ C_n = A^n C_0$.
4. On cherche donc à calculer A^n pour tout entier naturel n. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
   (b) On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Calculer la matrice D. Que constate-t-on ?
   (d) En déduire D^n pour tout entier naturel n.
   (e) Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0,\ A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Déterminer C_n pour tout $n \geqslant 0$.

   En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.
6. **Comment déterminer la matrice P ?**

   (programme de BCPST 2ème année)
   (a) Soit λ un réel. Montrer que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1, 2\}$. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$.
   (b) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, avec x, y, z trois réels inconnus.

   Pour chaque $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$, résoudre l'équation matricielle : $AX = \lambda_i X$.
   (c) Montrer que les solutions trouvées à la question précédente sont toujours de la forme : $\mathcal{S}_i = \{aM_i,\ a \in \mathbf{R}\}$, où M_i sont des matrice-colonnes à préciser.
   (d) On forme une matrice P en juxtaposant les matrices M_i trouvées à la question précédente. Comparer P à la matrice donnée **question 4.**

* * *