

Corrigé du DM n°5

Résolution d'un système de relations de récurrences linéaires par méthode matricielle

1. La matrice-colonne C_0 vaut : $C_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule : $AC_n = \begin{pmatrix} 3u_n - 3v_n + 8w_n \\ 4u_n - 4v_n + 14w_n \\ u_n - v_n + 4w_n \end{pmatrix} = C_{n+1}$ donc (1) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = AC_n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_n : \ll C_n = A^n C_0 \gg$.
 - * Initialisation au rang 0 : $A^0 C_0 = I_3 C_0 = C_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
 - * Hérédité à partir du rang 0 : soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors : $A^{n+1} C_0 = A A^n C_0 = A C_n$ d'après $\mathcal{P}_n$, donc $A^{n+1} C_0 = C_{n+1}$ d'après la question 2). Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
 - * Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geq 0, A^n C_0 = C_n}$.

$$\begin{aligned}
 4. (a) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ On a obtenu 3 pivots, donc } \boxed{P \text{ est inversible}}. \\
 & \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3, L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \\
 & \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \text{ donc } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

(b) On multiplie la matrice D à gauche par P , puis à droite par P^{-1} :
 $D = P^{-1}AP \Rightarrow PD = (PP^{-1})AP = I_3AP = AP \Rightarrow PDP^{-1} = A(PP^{-1}) = AI_3 = A$

(c) On calcule $D = P^{-1}AP$ et on trouve que : $\boxed{D \text{ est la matrice diagonale } \text{Diag}(0, 1, 2)}$.

(d) On en déduit que : $\boxed{\forall n \geq 1, D^n = \text{Diag}(0, 1, 2^n), \text{ et } D^0 = I_3}$.

(e) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n : \ll A^n = PD^n P^{-1} \gg$.

* Initialisation au rang 0 : $PD^0 P^{-1} = PI_3 P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ et $A^0 = I_3$ donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

* Hérédité à partir du rang 0 : soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie.

Alors $A^{n+1} = A^n A = (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n (P^{-1}P)DP^{-1} = P(D^n D)P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

* Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geq 0, A^n = PD^n P^{-1}}$.

5. Soit $n \geq 1$, on calcule $A^n = PD^n P^{-1}$:

$$PD^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2^n \\ 0 & 2 & 3 \times 2^n \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \text{ puis } A^n = \begin{pmatrix} 1 + 2^n & -1 - 2^n & 2 + 3 \times 2^n \\ -2 + 3 \times 2^n & 2 - 3 \times 2^n & -4 + 9 \times 2^n \\ -1 + 2^n & 1 - 2^n & -2 + 3 \times 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{On calcule enfin } C_n = A^n C_0 = \begin{pmatrix} 2 + 3 \times 2^n \\ -4 + 9 \times 2^n \\ -2 + 3 \times 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{On peut conclure : } \boxed{\forall n \geq 1, \begin{cases} u_n = 2 + 3 \times 2^n \\ v_n = -4 + 9 \times 2^n \\ w_n = -2 + 3 \times 2^n \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{cases}}.$$

$$6. (a) \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 8 \\ 4 & -4-\lambda & 14 \\ \boxed{1} & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - (3-\lambda)L_3}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda^2 + 7\lambda - 4 \\ 0 & -\lambda & 4\lambda - 2 \\ \boxed{1} & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \\ 0 & -\lambda & 4\lambda - 2 \\ \boxed{1} & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Donc $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = 3$ si $\lambda \neq 0, 1$ et 2 ,

et : $\boxed{\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1, 2\}}$.

(b) $\forall \lambda \in \mathbf{R}, AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$.

On résout sous forme matricielle en se servant de la question précédente.

$$\underline{\lambda = 0} : AX = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y \text{ est libre} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} (y \in \mathbf{R}).$$

$$\underline{\lambda = 1} : AX = X \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} z \text{ est libre} \\ y = 2z \\ x = y - 3z = -z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} (z \in \mathbf{R}).$$

$$\underline{\lambda = 2} : AX = 2X \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 6 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} z \text{ est libre} \\ y = 3z \\ x = y - 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} (z \in \mathbf{R}).$$

(c) Si $\lambda = 0$, on a trouvé $X = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ($y \in \mathbf{R}$). On pose $M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S}_0 = \{yM_0, y \in \mathbf{R}\}$.

Si $\lambda = 1$, on a trouvé $X = \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($z \in \mathbf{R}$). On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S}_1 = \{zM_1, z \in \mathbf{R}\}$.

Si $\lambda = 2$, on a trouvé $X = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($z \in \mathbf{R}$). On pose $M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S}_2 = \{zM_2, z \in \mathbf{R}\}$.

(d) En juxtaposant les matrice-colonnes M_0, M_1, M_2 précédentes, on forme la matrice : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Remarque : on pouvait éventuellement trouver une autre matrice P , en changeant l'ordre des colonnes, ou en multipliant une colonne par un réel non nul.

Cela n'aurait pas changé le résultat de la question 4c) : la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

* * *