# Corrigé du DM n°6

## Dénombrement d'anagrammes

1. Anagrammes de *cheval*.

*"cheval"* contient 6 lettres toutes distinctes. Un anagramme correspond donc à une permutation de l'ensemble $\{c, h, e, v, a, l\}$. $\boxed{\textit{cheval} \text{ possède } 6! = 720 \text{ anagrammes.}}$

2. Anagrammes d'*hippopotame*.

*"hippopotame"* contient 11 lettres, dont 3 *"p"* et 2 *"o"*. Pour former un anagramme :
- on choisit d'abord les places des 3 *"p"* : $\binom{11}{3}$ choix.
- on choisit ensuite les places des 2 *"o"* : $\binom{8}{2}$ choix.
- on effectue enfin une permutation des 6 lettres distinctes restantes : 6! choix.

$\boxed{\textit{"hippopotame"} \text{ possède } \binom{11}{3} \times \binom{8}{2} \times 6! = 3\,326\,400 \text{ anagrammes.}}$

3. Anagrammes particuliers d'*hippopotame*.
   (a) avec alternance consonne-voyelle.

*"hippopotame"* contient 6 consonnes et 5 voyelles. Pour qu'elles soient alternées, il faut placer les consonnes aux positions impaires (1,3,5,7,9,11) et les voyelles aux positions paires (2,4,6,8,10). Pour former un tel anagramme :
- on choisit les places des 3 *"p"* parmi les positions impaires : $\binom{6}{3}$ choix.
- on permute les 3 consonnes restantes sur les 3 positions impaires : 3! choix.
- on choisit les places des 2 *"o"* parmi les positions paires : $\binom{5}{2}$ choix.
- on permute les 3 voyelles restantes : 3! choix.

$\boxed{\textit{"hippopotame"} \text{ possède } \binom{6}{3} \times \binom{5}{2} \times (3!)^2 = 7\,200 \text{ anagrammes alternant consonnes et voyelles.}}$

   (b) contenant le mot *"math"*

Pour former un tel anagramme :
- on choisit la position du *"m"* : 8 choix, car le *"m"* ne peut être placé en position 9, 10 ou 11.
- les lettres *"a,t,h"* sont alors placées à la suite : 1 choix.
- on choisit ensuite les places des *"p"* : $\binom{7}{3}$ choix.
- on choisit ensuite les places des *"o"* : $\binom{4}{2}$ choix.
- on permute enfin les 2 lettres restantes : 2! choix.

$\boxed{\textit{"hippopotame"} \text{ possède } 8 \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times 2! = 3\,360 \text{ anagrammes contenant } \textit{"math"}.}$

4. **Informatique**

(a)
```
def anagramme (L) :
    if len(L) == 1 :
        return L
    M = L[1:]      # M est la liste L privée de sa première lettre L[0]
    lettre, A, B = L[0], anagramme(M), []
    for mot in A :
        for i in range(len(mot)+1) :
            B.append(mot[:i] + lettre + mot[i:])
    return B
```

(b) Si la liste $L$ contient des lettres identiques, la fonction `anagramme` produira plusieurs fois les mêmes anagrammes. Pour éviter cela, avant d'enregistrer un nouvel anagramme dans la liste $B$, on vérifie qu'il n'y est pas déjà.
```
    for mot in A :
        for i in range(len(mot)+1) :
            anag = mot[:i] + lettre + mot[i:]
            if anag not in B : B.append(anag)
```

5. Une formule de somme.

(a) Si on place le *"h"* en position 9, 10 ou 11, on ne peut plus placer les *"p"* après.

Ainsi : $\boxed{\forall k \geqslant 9,\ E_k = \varnothing.}$

(b) Cardinal de $E_k$.

Soit $k \in [\![1, 8]\!]$. Le *"h"* est en position $k$, donc il reste $11 - k$ positions possibles pour les *"p"*.
On en choisit 3 : $\binom{11-k}{3}$ choix. On place ensuite les *"o"* : $\binom{7}{2}$ choix.

On permute enfin les 5 lettres restantes : 5! choix. $\boxed{\forall k \in [\![1, 8]\!],\ \mathrm{card}(E_k) = \binom{11-k}{3} \times \binom{7}{2} \times 5!}$

(c) Première formule pour le cardinal de $E$.

$E = \bigcup_{k=1}^{8} E_k$ et cette union est disjointe, donc $\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{8} \mathrm{card}(E_k)$.

Ainsi : $\boxed{\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{8} \binom{11-k}{3}\binom{7}{2} 5!}$

(d) Une autre formule pour le cardinal de $E$.

On peut former les mêmes anagrammes en choisissant les 4 positions occupées (dans cet ordre) par *"h,p,p,p"*. Il y a alors $\binom{11}{4}$ choix. On place ensuite les *"o"* puis on permute les 5 lettres restantes.

On obtient : $\boxed{\mathrm{card}(E) = \binom{11}{4}\binom{7}{2} 5! = 831\,600}$

(e) Une généralisation.

D'après **5c** et **5d**, et après simplification par $\binom{7}{2}5!$, il vient : $\sum_{k=1}^{8} \binom{11-k}{3} = \binom{11}{4}$.

Cela correspond à la formule demandée lorsque $p = 3$ et $n = 11$.
Soient $p, n \in \mathbf{N}$. Considérons un mot de $n$ lettres contenant une lettre *"h"*, $p$ lettres *"p"* et $(n - 1 - p)$ lettres identiques (par exemple : *"a"*).
Dénombrons les anagrammes de ce mot dans lesquels le *"h"* est placé avant tous les *"p"*.

- en choisissant les $(p + 1)$ places occupées dans cet ordre par *"h,p,...,p"* : il y a $\binom{n}{p+1}$ choix.
- en plaçant d'abord le *"h"* en position $k \in [\![1, n - p]\!]$ puis en choisissant

les places des lettres *"p"* parmi les $(n - k)$ dernières lettres : il y a $\binom{n-k}{p}$ choix.

Ainsi : $\boxed{\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2,\ \binom{n}{p+1} = \sum_{k=1}^{n-p} \binom{n-k}{p}}$.

*remarque : si $p \geqslant n$, alors chaque membre de cette égalité est nul.*

(f) Un changement d'indices.

On pose $k' = n - k$ dans la somme précédente :

$\sum_{k=1}^{n-p} \binom{n-k}{p} = \sum_{k'=p}^{n-1} \binom{k'}{p}$ donc : $\boxed{\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2,\ \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} = \binom{n}{p+1}}$.

* * *