Corrigé du DM n°7

Probabilité et suites récurrentes

1. $\forall n \geqslant 1,\ p = \mathbf{P}(F_{n+1} \mid \overline{F_n})$, $\quad q = \mathbf{P}(F_{n+2} \mid F_n \cap F_{n+1})$ et $\quad r = \mathbf{P}(F_{n+2} \mid \overline{F_n} \cap F_{n+1})$.
2. On sait que $F_1 \cap F_2$ est réalisé, donc $\boxed{\mathbf{P}(F_3) = q.}$

$(F_3, \overline{F_3})$ est un système complet d'événements (SCE). D'après la formule des probabilités totales (FPT) :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(F_4) &= \mathbf{P}(F_3) \times \mathbf{P}(F_4 \mid F_3) + \mathbf{P}(\overline{F_3}) \times \mathbf{P}(F_4 \mid \overline{F_3})\\ &= q \times q + (1-q) \times p \quad \text{donc } \boxed{\mathbf{P}(F_4) = q^2 + p - pq.}\end{aligned}$$

3. De même, $(F_3 \cap F_4, \overline{F_3} \cap F_4, \overline{F_4})$ est un SCE. D'après la FPT :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(F_5) &= \mathbf{P}(F_3 \cap F_4) \times q + \mathbf{P}(\overline{F_3} \cap F_4) \times r + \mathbf{P}(\overline{F_4}) \times p\\ &= \mathbf{P}(F_3) \times \mathbf{P}(F_4 \mid F_3) \times q + \mathbf{P}(\overline{F_3}) \times \mathbf{P}(F_4 \mid \overline{F_3}) \times r + (1 - \mathbf{P}(F_4)) \times p\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(F_5) = q^3 + (1-q)pr + (1 - q^2 - p + pq)p.}$$

4. $\ast$ $A_N = \bigcap_{n=1}^{N} F_n$ donc d'après la formule des probabilités composées (FPC) :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_N) &= \mathbf{P}(F_1) \times \mathbf{P}(F_2 \mid F_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(F_N \mid F_1 \cap \cdots \cap F_{N-1})\\ &= 1 \times 1 \times q \times \cdots \times q \quad \text{donc } \boxed{\forall N \geqslant 2,\ \mathbf{P}(A_N) = q^{N-2}.}\end{aligned}$$

$\ast$ On s'intéresse au contraire : $\overline{B_N} = \bigcap_{n=3}^{N} \overline{F_n}$ donc d'après la FPC :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\overline{B_N}) &= \mathbf{P}(\overline{F_3}) \times \mathbf{P}(\overline{F_4} \mid \overline{F_3}) \times \cdots \times \mathbf{P}(\overline{F_N} \mid \overline{F_3} \cap \cdots \cap \overline{F_{N-1}})\\ &= (1-q)(1-p)\cdots(1-p) \quad \text{donc } \mathbf{P}(\overline{B_N}) = (1-q)(1-p)^{N-3}\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathbf{P}(B_N) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B_N})$ donc $\boxed{\forall N \geqslant 3,\ \mathbf{P}(B_N) = 1 - (1-q)(1-p)^{N-3}}$

5. On demande : $\mathbf{P}(F_3 \mid F_4)$. La formule de Bayes donne : $\mathbf{P}(F_3 \mid F_4) = \dfrac{\mathbf{P}(F_3)}{\mathbf{P}(F_4)} \times \mathbf{P}(F_4 \mid F_3)$

donc $\mathbf{P}(F_3 \mid F_4) = \dfrac{q}{q^2 + p - pq} \times q$, soit : $\boxed{\mathbf{P}(F_3 \mid F_4) = \dfrac{q^2}{q^2 + p - pq}.}$

6. (a) Si l'arbre a eu peu de fruits l'année $N+1$, alors on ajoute un 0 à P_N, donc : $P_{N+1} = 10P_N$.
Si l'arbre a eu beaucoup de fruits, alors on ajoute un 1, donc : $P_{N+1} = 10P_N + 1$.

(b) P_N finit par 11 quand le reste de sa division euclidienne par 100 vaut 11.

`PN % 100 == 11` renvoie `True` quand P_N finit par 11, et `False` sinon.

(c)
```
def anneeSuivante(PN,p,q,r) :
    if PN % 10 == 0 :
        if rd.random() < p : return 10*PN + 1
        else : return 10*PN
    elif PN % 100 == 11 :
        if rd.random() < q : return 10*PN + 1
        else : return 10*PN
    else :
        if rd.random() < r : return 10*PN + 1
        else : return 10*PN
```

(d)
```
def production(N,p,q,r) :
    PN = 11
    for _ in range(N-2) :
        PN = anneeSuivante(PN,p,q,r)
    return PN
```

(e)
```
def estimation() :
    somme = 0
    for _ in range(1000)
        PN = production(50,0.8,0.2,0.3)
        PN = str(PN)
        for chiffre in PN :
            somme += int(chiffre)
    return somme / 1000
```

7. On utilise le SCE $(F_n, \overline{F_n})$. La FPT donne : $u_{n+1} = \mathbf{P}(F_{n+1}) = \mathbf{P}(F_n) \times a_n + \mathbf{P}(\overline{F_n}) \times p$
   donc : $u_{n+1} = u_n \times a_n + p(1 - u_n)$, d'où : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n \times u_n = u_{n+1} - p\,(1 - u_n).}$
8. D'après la FPT appliquée au SCE donné, pour tout $n \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(F_{n+2}) &= \mathbf{P}(F_n \cap F_{n+1}) \times \mathbf{P}(F_{n+2} \,|\, F_n \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{F_n} \cap F_{n+1}) \times \mathbf{P}(F_{n+2} \,|\, \overline{F_n} \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{F_{n+1}}) \times \mathbf{P}(F_{n+2} \,|\, \overline{F_{n+1}})\\ &= u_n \times a_n \times q + \mathbf{P}(\overline{F_n}) \times \mathbf{P}(F_{n+1} \,|\, \overline{F_n}) \times r + (1 - u_{n+1}) \times p\\ &= (u_{n+1} - p(1 - u_n))\,q + (1 - u_n)pr + (1 - u_{n+1})p\end{aligned}$$
   Soit : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = (q - p)u_{n+1} + (pq - pr)u_n - pq + pr + p.}$
9. On remplace u_n, u_{n+1} et u_{n+2} par ℓ dans la relation précédente :
   $\ell = (q - p)\ell + (pq - pr)\ell - pq + pr + p$ donc $\boxed{\ell = \dfrac{-pq + pr + p}{1 + p - q + pr - pq}.}$
   Remarque : le dénominateur vaut $1 + (p - q) + p(r - q)$, il est non nul car $p - q > 0$ et $r - q > 0$.
10. Soit $n \geqslant 1$. Alors :
$$\begin{aligned}v_{n+2} + (p - q)v_{n+1} + p(r - q)v_n &= (u_{n+2} - \ell) + (p - q)(u_{n+1} - \ell) + p(r - q)(u_n - \ell)\\ &= u_{n+2} + (p - q)u_{n+1} + p(r - q)u_n - (\ell + (p - q)\ell + p(r - q)\ell)\\ &= (-pq + pr + p) - (-pq + pr + p)\\ &= 0\end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ vérifie } (*).}$
11. **Application numérique** : $p = 0,8 \quad q = 0,2$ et $r = 0,3$.
   (a) $\ell = \dfrac{-0,8 \times 0,2 + 0,8 \times 0,3 + 0,8}{1 + 0,8 - 0,2 + 0,8 \times 0,3 - 0,8 \times 0,2} = \dfrac{0,88}{1,68}$ donc $\boxed{\ell = \dfrac{11}{21}.}$
   (b) $(*) \Leftrightarrow v_{n+2} + 0,6v_{n+1} + 0,08v_n = 0.$ On pose l'équation caractéristique : $x^2 + 0,6x + 0,08 = 0$,
   de discriminant $\Delta = 0,6^2 - 4 \times 1 \times 0,08 = 0,04 > 0$
   et de racines réelles : $x_1 = \dfrac{1}{2}(-0,6 + \sqrt{0,04}) = -0,2$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}(-0,6 - \sqrt{0,04}) = -0,4$.
   D'après le cours, il existe des constantes A, B telles que : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ v_n = A(-0,2)^n + B(-0,4)^n.}$
   (c) $\forall n \geqslant 1,\ u_n = v_n + \ell = A(-0,2)^n + B(-0,4)^n + \dfrac{11}{21}$.
   On détermine A et B grâce aux valeurs initiales : $u_1 = u_2 = 1$, ce qui donne le système :
   $$\begin{cases}-0,2A - 0,4B + \frac{11}{21} = 1\\ 0,04A + 0,16B + \frac{11}{21} = 1\end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow -5L_1\\ L_2 \leftarrow 25L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \text{-50/21}\\ 1 & 4 & 250/21\end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \text{-50/21}\\ 0 & 2 & 300/21\end{array}\right)$$
   donc $B = \dfrac{150}{21} = \dfrac{50}{7}$ puis $A = -\dfrac{350}{21} = -\dfrac{50}{3}$.
   Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = -\dfrac{50}{3}(-0,2)^n + \dfrac{50}{7}(-0,4)^n + \dfrac{11}{21}.}$
   (d) $|-0,2| < 1$ et $|-0,4| < 1$ donc $\lim u_n = \dfrac{11}{21}$: $\boxed{\text{la probabilité de donner beaucoup de fruits tend vers } \dfrac{11}{21}.}$

* * *