Corrigé du DS n°5

Exercice 1 : Une suite de matrice-colonnes

1. $X_2 = AX_1 + BX_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. On échelonne P et la matrice identité I_3 en miroir :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftrightarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -13 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$\mathrm{rg}(P) = 3$ donc $\boxed{P \text{ est inversible.}}$ On trouve P^{-1} par remontée :
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 5 & 10 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 6 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 6 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 13 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 13 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{D = \mathrm{Diag}(0,1,1).}$

4. $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$, et de même $\Delta = P^{-1}BP$ donc $B = P\Delta P^{-1}$.
De plus, $\forall n \geqslant 0,\ Y_n = P^{-1}X_n$ donc $X_n = PY_n$.
(1) $\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ PY_{n+2} = PDP^{-1}X_{n+1} + P\Delta P^{-1}X_n$
$\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ Y_{n+2} = DP^{-1}X_{n+1} + \Delta P^{-1}X_n$ en multipliant **à gauche** par P^{-1}
$\Leftrightarrow \forall n \geqslant 0,\ Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$ par définition de Y_n et Y_{n+1}.

5. $Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 13 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{a_0 = 3, b_0 = 1 \text{ et } c_0 = -1.}$

$Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 13 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{a_1 = -1, b_1 = 2 \text{ et } c_1 = -1.}$

6. D'après la question **(4)**, $\forall n \geqslant 0,\ \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_{n+1} + 2b_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ \begin{cases} a_{n+2} = a_n \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n \\ c_{n+2} = c_{n+1} \end{cases}}$

7. $\ast$ l'équation caractéristique $r^2 = 1$ a pour solutions $r = 1$ ou $r = -1$.
Il existe donc des constantes $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ telles que : $\forall n \geqslant 0,\ a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times (-1)^n = \alpha + \beta(-1)^n$.
D'après la question **(5)**, $a_0 = 3$ et $a_1 = -1$ donc $\begin{cases} 3 = \alpha + \beta \\ -1 = \alpha - \beta \end{cases}$ ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ a_n = 1 + 2(-1)^n.}$

$\star$ l'équation caractéristique $r^2 = r + 2$ a pour solutions $r = 2$ ou $r = -1$.
Il existe donc des constantes $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ telles que : $\forall n \geqslant 0,\ b_n = \gamma \times 2^n + \delta \times (-1)^n$.

D'après la question **(5)**, $b_0 = 1$ et $b_1 = 2$ donc $\begin{cases} 1 = \gamma + \delta \\ 2 = 2\gamma - \delta \end{cases}$ ainsi $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ b_n = 2^n.}$

$\star$ Pour tout $n \geqslant 0,\ c_{n+2} = c_{n+1}$ donc la suite (c_n) est constante à partir du rang 1.
D'après la question **(5)**, $c_0 = c_1 = -1$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ c_n = -1.}$

8. On connaît Y_n d'après la question **(7)**. On trouve X_n grâce à la relation : $X_n = PY_n$.

$$X_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + 2(-1)^n \\ 2^n \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall n \geqslant 0,\ X_n = \begin{pmatrix} 1 + 6(-1)^n + 2^n \\ -2 - 2(-1)^n \\ -4 + 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2 : Dénombrement

1. On constitue une liste de cartes ordonnée, et avec répétitions.
L'ensemble des tirages possibles est donc l'ensemble des p-listes de longueur 4 de l'ensemble des cartes (de cardinal 32). $\boxed{\text{Il y a dans ce cas } 32^4 \text{ tirages possibles.}}$
2. On constitue une liste de cartes ordonnée, et sans répétition.
L'ensemble des tirages possibles est donc l'ensemble des arrangements de longueur 4 de l'ensemble des cartes. $\boxed{\text{Il y a dans ce cas } A_{32}^4 \text{ tirages possibles.}}$
3. On constitue une liste de cartes non ordonnée, et sans répétition.
L'ensemble des tirages possibles est donc l'ensemble des combinaisons de longueur 4 de l'ensemble des cartes. $\boxed{\mathrm{card}(T) = \binom{32}{4}.}$
4. Pour constituer un tirage de l'ensemble D, il faut :
   - $\star$ choisir un As parmi 4 : $\binom{4}{1} = 4$ choix,
   - $\star$ choisir deux Rois parmi 4 : $\binom{4}{2} = 6$ choix,
   - $\star$ choisir une carte parmi les 24 qui ne sont ni des As, ni des Rois : $\binom{24}{1} = 24$ choix.

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{card}(D) = 4 \times 6 \times 24 = 24^2.}$
5. (a) $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans As.
Pour constituer un tel tirage, on choisit 4 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des As : $\boxed{\mathrm{card}(\overline{A}) = \binom{28}{4}.}$

   (b) $\overline{A}$ est le complémentaire de A donc : $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(T) - \mathrm{card}(\overline{A})$, soit : $\boxed{\mathrm{card}(A) = \binom{32}{4} - \binom{28}{4}.}$
6. (a) $\overline{A} \cap \overline{R}$ est l'ensemble des tirages ne contenant ni As, ni Roi.
On choisit alors 4 cartes parmi les 24 qui ne sont ni des As, ni des Rois : $\boxed{\mathrm{card}(\overline{A} \cap \overline{R}) = \binom{24}{4}.}$

   (b) $\mathrm{card}(\overline{A} \cup \overline{R}) = \mathrm{card}(\overline{A}) + \mathrm{card}(\overline{R}) - \mathrm{card}(\overline{A} \cap \overline{R})$
   $= \binom{28}{4} + \binom{28}{4} - \binom{24}{4}$ $\quad \boxed{\mathrm{card}(\overline{A} \cup \overline{R}) = 2 \times \binom{28}{4} - \binom{24}{4}.}$

   (c) $\overline{A \cup R} = \overline{A} \cap \overline{R}$, donc d'après la question **6a**, $\boxed{\mathrm{card}(A \cup R) = \binom{32}{4} - \binom{24}{4}.}$
7. On demande $\mathrm{card}(A \cap R)$. Or, $\overline{A \cap R} = \overline{A} \cup \overline{R}$, de cardinal trouvé question **6b**.
On peut conclure : $\boxed{\mathrm{card}(A \cap R) = \binom{32}{4} - 2 \times \binom{28}{4} + \binom{24}{4}.}$

8. Soit S l'ensemble des tirages contenant strictement plus d'As que de Rois.
On effectue une partition de S :
pour $k \in [\![1,4]\!]$, soit S_k l'ensemble des tirages de S contenant exactement k As.

$*$ un tirage de S_4 contient les 4 As : $\text{card}(S_4) = \binom{4}{4} = 1$.

$*$ un tirage de S_3 contient exactement 3 As. Peu importe l'autre carte, il y aura toujours strictement plus d'As que de Rois : $\text{card}(S_3) = \binom{4}{3} \times \binom{28}{1}$.

$*$ un tirage de S_2 contient 2 As choisis parmi 4, puis 2 cartes choisies parmi les 28 autres, auxquelles on enlève les choix de 2 Rois parmi 4, qui conduiraient à avoir finalement autant d'As que de Rois. Ainsi, $\text{card}(S_2) = \binom{4}{2} \times \left(\binom{28}{2} - \binom{4}{2}\right)$.

$*$ un tirage de S_1 contient exactement un As, et aucun Roi. On choisit un As parmi les 4, puis trois cartes parmi les 24 qui ne sont ni As ni Roi : $\text{card}(S_1) = \binom{4}{1} \times \binom{24}{3}$.

Par union disjointe : $\text{card}(S) = \sum_{k=1}^{4} \text{card}(S_k)$

donc $\boxed{\text{card}(S) = 1 + \binom{4}{3} \times \binom{28}{1} + \binom{4}{2} \times \left(\binom{28}{2} - \binom{4}{2}\right) + \binom{4}{1} \times \binom{24}{3}.}$

9. (a)
```
def compte(L,k) :
    compteur = 0
    for elt in L :
        if elt == k :
            compteur += 1
    return compteur
```
(b)
```
def plusdAs(L) :
    as = compte(L,1)
    rois = compte(L,2)
    return as > rois
```

Exercice 3 : Probabilités

1. Il y a du soleil le premier jour, donc S_1 est un événement certain : $\mathbf{P}(S_1) = 1$.
2. D'après l'énoncé : $\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{P}_{S_n}(S_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = \frac{3}{5}$.
3. $\boxed{\mathbf{P}(S_2) = \frac{1}{3}}$ car S_1 est certain.

   $(S_2, \overline{S_2})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
   $\mathbf{P}(S_3) = \mathbf{P}(S_2) \times \mathbf{P}_{S_2}(S_3) + \mathbf{P}(\overline{S_2}) \times \mathbf{P}_{\overline{S_2}}(S_3)$
   $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{5}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(S_3) = \frac{23}{45}.}$
4. On demande $\mathbf{P}_{S_3}(\overline{S_2}) = 1 - \mathbf{P}_{S_3}(S_2) = 1 - \frac{\mathbf{P}(S_2)}{\mathbf{P}(S_3)} \times \mathbf{P}_{S_2}(S_3)$ d'après la formule de Bayes,

   donc $\mathbf{P}_{S_3}(\overline{S_2}) = 1 - \frac{1/3}{23/45} \times \frac{1}{3}$, $\boxed{\mathbf{P}_{S_3}(\overline{S_2}) = \frac{18}{23}.}$
5. (a) $\forall n \geqslant 2,\ P_n = \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}$, soit : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ P_n = \bigcap_{k=2}^{n} \overline{S_k}.}$

   (b) D'après la formule des probabilités composées :
   $\forall n \geqslant 2,\ \mathbf{P}(P_n) = \mathbf{P}(\overline{S_2}) \times \mathbf{P}_{\overline{S_2}}(\overline{S_3}) \times \cdots \times \mathbf{P}_{\overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}}}(\overline{S_n})$
   $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \cdots \times \frac{2}{5}$, donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbf{P}(P_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}.}$
6. (a) Soit $n \geqslant 1$. Alors $(S_n, \overline{S_n})$ est un SCE. D'après la FPT :
   $\mathbf{P}(S_{n+1}) = \mathbf{P}(S_n) \times \mathbf{P}_{S_n}(S_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{S_n}) \times \mathbf{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$
   $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{3} + (1 - u_n) \times \frac{3}{5}$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = -\frac{4}{15} u_n + \frac{3}{5}.}$

(b)
```
def U(n) :
    if n == 1 : return 1
    return -4/15*U(n-1) + 3/5
```

(c) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe ℓ :
$\ell = -\dfrac{4}{15}\ell + \dfrac{3}{5}$ donne $\ell = \dfrac{9}{19}$. La suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison $q = -\dfrac{4}{15}$.
$\forall n \geqslant 1,\ v_n = v_1 \times q^{n-1}$ avec $v_1 = u_1 - \ell = \dfrac{10}{19}$.
En conclusion, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{10}{19} \times \left(-\dfrac{4}{15}\right)^{n-1} + \dfrac{9}{19}.}$

(d) $-1 < -\dfrac{4}{15} < 1$ donc $\lim \left(-\dfrac{4}{15}\right)^{n-1} = 0$. Par opérations, $\boxed{\lim u_n = \dfrac{9}{19}.}$

7. Soit $n \geqslant 1$. On nomme C_n l'événement : "la grenouille chante le jour n".
$(S_n, \overline{S_n})$ est un SCE. D'après la FPT :
$\mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}(S_n) \times \mathbf{P}_{S_n}(C_n) + \mathbf{P}(\overline{S_n}) \times \mathbf{P}_{\overline{S_n}}(C_n)$
$= u_n \times \dfrac{1}{5} + (1 - u_n) \times \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$. Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ c_n = -\dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{4}{5}.}$