Exercice 1 . Calculer, quand elles existent, les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions :

1. $f(x,y) = xe^{\cos(xy)}$
2. $g(x,y) = x^2y^2 \operatorname{Arctan}(xy^2)$
3. $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
4. $i(x,y) = ye^{-x^2+y}$

Exercice 2 . Soit V une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
Soit la fonction $\Phi : \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow \mathbf{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^\star$, par : $\Phi(t) = V(t^2+1, e^t + \ln t - 1)$.
Exprimer la dérivée de Φ en fonction des dérivées partielles de V.

Exercice 3 . Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(0,0) = \alpha\,, \quad f(0,\frac{\pi}{4}) = \beta \quad \text{avec } \alpha,\beta \in \mathbf{R}^\star \\ \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2f(x,y) \text{ et } \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4f(x,y) \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé, on note $g_x(y) = f(x,y)$.
   Montrer que g_x vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
2. Résoudre cette EDL_2 et en déduire qu'il existe des fonctions $A, B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) = A(x)\cos(2y) + B(x)\sin(2y)$.
3. Soit $y \in \mathbf{R}$ un réel fixé. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 portant sur les fonctions A et B et dépendante du paramètre y.
4. Écrire puis résoudre ces équations différentielles pour $y = 0$, puis pour $y = \frac{\pi}{4}$.
5. Montrer enfin que : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) = e^{-2x}\left(\alpha\cos(2y) + \beta\sin(2y)\right)$.

Exercice 4 . Étudier les extrema des fonctions

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3 \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Exercice 5 . (G2E 2005) On considère le système (S) constitués des équations différentielles suivantes :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = y^2 \\ y' = \sin x \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions dérivables de la variable $t \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer les solutions constantes de (S).
2. a. On considère une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. À quelle condition sur les dérivées partielles de V la fonction composée $\Phi : t \longmapsto V(x(t),y(t))$ est-elle constante lorsque (x,y) est une solution de (S) ?
   b. Vérifier que la fonction $V(x,y) = \cos x + \dfrac{y^3}{3}$ répond à la condition précédente.
3. On considère la solution (x_0,y_0) de (S) qui satisfait $x_0(0) = 0$ et $y_0(0) = -\sqrt[3]{3}$.
   Montrer que : $\forall t \in \mathbf{R}$, $y_0(t) = \sqrt[3]{-3\cos(x_0(t))}$.