Corrigé du DM n°9

Suite de racines

1. **Étude des fonctions f_n**

   (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Par opérations, f_n est continue sur $\mathbf{R}_+^\star \setminus \{1\}$.
   Étude en 1 : on pose $1+t=x$, donc $t=x-1$. On a $t \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 1$, et pour $t \neq 0$:
   $f_n(x) = f_n(1+t) = \dfrac{2(1+t)^n \ln(1+t)}{(1+t)^2-1} = \dfrac{2(1+t)^n \ln(1+t)}{t^2+2t} \underset{0}{\sim} \dfrac{2t}{2t} = 1$
   donc $\lim\limits_{t\to 0} f_n(1+t) = \lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1 = f_n(1)$ donc f_n est continue en 1.
   En conclusion : $\boxed{f_n \text{ est continue sur } \mathbf{R}_+^\star.}$

   (b) On a quand $x \longrightarrow 0$: $f_n(x) \underset{0}{\sim} -2x^n \ln(x)$.
   $\ast\, n=0$: $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = +\infty$.
   $\ast\, n \geqslant 1$: Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$.
   $\boxed{f_n \text{ est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si } n \geqslant 1. \text{ On pose alors : } f_n(0)=0.}$

   (c) $x^2-1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x^{n-2}\ln(x)$.
   $\ast\, n \leqslant 1$: alors $n-2<0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-2}\ln(x) = 0$.
   $\ast\, n \geqslant 2$: alors par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-2}\ln(x) = +\infty$.
   $\boxed{\text{Si } n \leqslant 1, \text{ alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0. \text{ Si } n \geqslant 2, \text{ alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.}$

2. **Variations de f_n sur $[1,+\infty[$**

   (a) Sur $]1,+\infty[$, f_n est dérivable par opérations et :
   $$\begin{aligned}\forall x>1,\ f_n'(x) &= \frac{1}{(x^2-1)^2} \times \Big[2\big(nx^{n-1}\ln(x) + x^n.\tfrac{1}{x}\big)(x^2-1) - 2x \times 2x^n \ln(x)\Big] \\ &= \frac{1}{(x^2-1)^2} \times \Big[2x^{n-1}\big((n-2)x^2-n\big)\ln(x) + 2(x^2-1)x^{n-1}\Big] \\ &= \frac{2x^{n-1}}{(x^2-1)^2} \times \Big[\big((n-2)x^2-n\big)\ln(x) + x^2-1\Big]\end{aligned}$$
   Par ailleurs :
   $$\begin{aligned}\Big[(n-2)(x^2-1)\ln x + (x^2-1-2\ln x)\Big] &= (nx^2-n-2x^2)\ln(x) + x^2-1 \\ &= \big((n-2)x^2-n\big)\ln(x) + x^2-1\end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{\forall x>1,\ f_n'(x) = \dfrac{2x^{n-1}}{(x^2-1)^2}\Big[(n-2)(x^2-1)\ln x + (x^2-1-2\ln x)\Big].}$

   (b) Pour $x \geqslant 1$, on pose $g(x) = x^2-1-2\ln(x)$.
   Par opérations, g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = 2 \times \dfrac{x^2-1}{x} > 0$.
   g est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   Puisque $g(1)=0$, on a : $\boxed{\forall x>1,\ x^2-1-2\ln(x)>0.}$

   (c) $n \geqslant 2$ et $x>1$ donc $(n-2)(x^2-1)\ln(x) \geqslant 0$. D'après **2a)** et **2b)** : $\forall x>1,\ f_n'(x)>0$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	? $\qquad$ +
f_n	1 $\nearrow$ $+\infty$

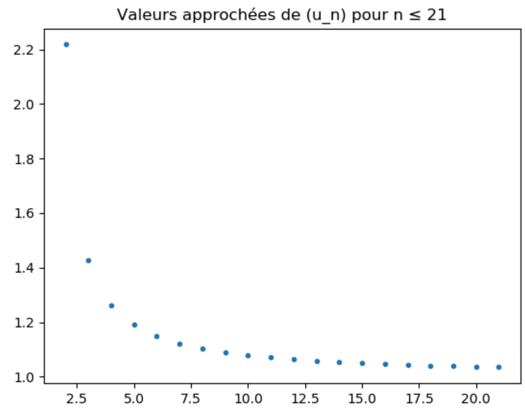
3. **Étude d'une suite définie implicitement**

   (a) Sur **l'intervalle** $]1,+\infty[$, la fonction f_n est **strictement croissante** et **continue**.
   D'après le théorème de la bijection continue, f_n réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $f\big(]1,+\infty[\big) =]1,+\infty[$.
   $2 \in]1,+\infty[$ donc $\boxed{\text{l'équation } (E_n) : f_n(x) = 2 \text{ possède une unique solution } u_n \text{ dans }]1,+\infty[.}$

   (b) $\forall n \geqslant 2,\ f_n(e) = \dfrac{2e^n \ln(e)}{e^2-1} = \dfrac{2e^n}{e^2-1} > \dfrac{2e^n}{e^2} = 2e^{n-2} \geqslant 2.$
   $f_n(e) > 2$ donc $u_n < e$. Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n \in]1,e[.}$

4. **Valeurs approchées obtenues par dichotomie**

   (a)
```
def dichotomie(g,a,b,eps) :
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if g(a)*g(c) < 0 : b = c
        else : a = c
    return a
```
   (b)
```
from math import log,e
def gn(n) :
    def fnMoins2(x) :
        if x == 1 : return -1
        return 2*x**n*log(x)/(x**2-1)-2
    return fnMoins2
```
   (c)
```
def listeU(n,eps) :
    L = []
    for k in range(2,n+1) :
        L.append(dichotomie(gn(k),1,e,eps))
    return L
```
   (d)
```
import matplotlib.pyplot as plt
def graphe(n,eps) :
    X = list(range(2,n+2))
    Y = listeU(n+1,eps)
    plt.plot(X,Y,'.')
    plt.show()
```



5. **Comportement de la suite (u_n)**

   (a) Soit $x > 1$. On a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{2x^n(x-1)\ln(x)}{x^2-1} > 0.$

   (b) On a donc : $\forall n \geqslant 2,\ f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n) = 2$ donc $u_{n+1} \in]1,u_n[$.
   $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est donc strictement décroissante.}}$

   (c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée par 1, donc $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge vers } \ell.}$
   Pour tout $n \geqslant 2$, $1 < u_n$ donc par passage à la limite : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 1 \leqslant \ell \leqslant u_n.}$

6. **Détermination de la limite ℓ**

   (a) D'après (E_n), $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{2{u_n}^n \ln(u_n)}{{u_n}^2-1} = 2$ donc ${u_n}^n = \dfrac{{u_n}^2-1}{\ln(u_n)}$.
   On suppose que $\ell > 1$. Par opérations, $\dfrac{{u_n}^2-1}{\ln(u_n)} \longrightarrow \dfrac{\ell^2-1}{\ln(\ell)}$.
   Donc $\boxed{({u_n}^n) \text{ converge vers } \dfrac{\ell^2-1}{\ln(\ell)}.}$

   (b) (u_n) étant décroissante, $\forall n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \ell$ donc ${u_n}^n \geqslant \ell^n$.
   On a supposé $\ell > 1$, donc (ℓ^n) diverge vers $+\infty$.
   Par comparaison, $({u_n}^n)$ diverge aussi vers $+\infty$.
   C'est en contradiction avec le résultat de la question précédente. Conclusion : $\boxed{\ell = 1.}$