Corrigé du DM n°12

Espaces vectoriels

Dans $\mathbf{R}^4$, on pose : $u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,0,1,1)$, $u_3 = (0,1,0,-1)$ et $u_4 = (1,-1,-1,1)$.
Soient les ensembles : $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ x = y\}$.

1. (a) Une base de $\mathbf{R}^4$?

Card $(u_1,u_2,u_3,u_4) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ donc cette famille est une base de $\mathbf{R}^4$ si et seulement si elle est génératrice.
On étudie pour le savoir le rang de la matrice canoniquement associée à cette famille :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On a donc : } \mathrm{rg}(M) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(M) \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

$\mathrm{rg}(M) < 4$ donc (u_1,u_2,u_3,u_4) n'est pas génératrice : $\boxed{(u_1,u_2,u_3,u_4) \text{ n'est pas une base de } \mathbf{R}^4.}$

(b) Base et dimension de E.

La question précédente montre que $\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \boxed{\dim(E) = 3.}$
Une base de E est donc donnée par une famille libre de cardinal 3 extraite de (u_1,u_2,u_3,u_4).

On remarque que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1,u_3,u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ contient une matrice extraite de rang 3 : I_3.

Ainsi (u_1,u_2,u_3) engendre un s-ev de dimension 3, donc E lui-même.
Étant génératrice de E et de cardinal $3 = \dim(E)$, (u_1,u_2,u_3) est libre. Donc $\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } E.}$

(c) Équation cartésienne de E.

$u = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ appartient à E si et seulement si $\exists \lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R},\ u = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3$

d'où le système d'équations paramétriques de E : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \nu \\ z = \mu \\ t = \lambda + \mu - \nu \end{cases} \quad (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbf{R}^3$

On élimine les paramètres λ,μ,ν pour obtenir une équation cartésienne de E.
Par substitution dans la quatrième équation, on obtient : $\boxed{E \text{ a pour équation cartésienne : } x - y + z - t = 0.}$

(d) F sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ x = y\} = \{(x,x,z,t) \in \mathbf{R}^4\} = \{x(1,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1),\ x,z,t \in \mathbf{R}\}$
On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$ dans $\mathbf{R}^4$.
L'écriture précédente montre que $\boxed{F = \mathrm{Vect}(v_1,e_3,e_4)}$ donc F est un s-ev de $\mathbf{R}^4$.

(e) Base et dimension de F.

$\mathrm{rg}(v_1,e_3,e_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3$ est maximal donc $\boxed{\dim(F) = 3 \text{ et } (v_1,e_3,e_4) \text{ est une base de } F.}$

2. (a) $E \cap F = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

On pose $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. On sait que $v_2 = u_2 \in E$. Par ailleurs, $1 - 1 + 0 - 0 = 0$ donc $v_1 \in E$. Ainsi $G \subset E$.
De plus, $v_1 \in F$ et les coordonnées de v_2 vérifient l'équation de F, donc $v_2 \in F$.
Ainsi $G \subset F$. On en déduit que $G \subset E \cap F$.
Enfin, $u_1 \notin F$ donc $E \neq F$: $E \cap F$ est un sous-espace strict de E et de F.
Puisque $\dim(E) = \dim(F) = 3$, alors $\dim(E \cap F) \leqslant 2$.
Mais v_1 et v_2 sont non colinéaires (donc libres) : $\dim(G) = 2$.
L'inclusion $G \subset E \cap F$ permet de conclure que $\dim(E \cap F) = 2$ et $\boxed{E \cap F = G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2).}$

(b) (v_1, v_2, v_3) base de E.

On demande $v_3 = (0, y, 0, t)$. Dans ce cas, vu l'équation cartésienne de E, $v_3 \in E \Leftrightarrow -y - t = 0$ donc $t = -y$. En posant $y = 1$, on obtient $\boxed{v_3 = (0, 1, 0, -1)} = u_3$.

$\mathrm{Mat}(v_1, v_3, v_2) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3, donc maximal. Ainsi, $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } E.}$

(c) (v_1, v_2, v_4) base de F.

On demande $v_4 = (0, 0, z, 0) \in F$. Pour tout $z \in \mathbf{R}$, $(0, 0, z, 0)$ vérifie l'équation de F, donc on peut choisir $z = 1$ et poser $\boxed{v_4 = e_3 = (0, 0, 1, 0).}$

$\mathrm{Mat}(v_1, v_4, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ est de rang 3, donc maximal. Ainsi, $\boxed{(v_1, v_2, v_4) \text{ est une base de } F.}$

3. (a) $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ base de $\mathbf{R}^4$.

$\mathrm{Mat}(v_1, v_3, v_4, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et après opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$\mathrm{rg}(v_1, v_3, v_4, v_2) = \mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbf{R}^4$.

Étant de cardinal 4, elle est génératrice minimale, donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^4.}$

(b) Matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible en tant que matrice de passage.

On trouve son inverse en l'échelonnant en vis-à-vis de la matrice identité I_4 :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3}}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3}}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_4 \leftarrow -L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4}}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$

4. Un changement de bases.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et N vérifient la formule de changement de bases : $\boxed{N = P^{-1}M, \quad \text{ou encore : } M = PN.}$

Après calculs, on trouve : $\boxed{N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$ ce qui signifie : $\begin{cases} w_1 = v_1 + 5v_2 + v_3 - 2v_4 \\ w_2 = 2v_1 - v_2 - 2v_3 - 2v_4 \end{cases}$