

I Définitions, notations

1. Application linéaire entre deux espaces vectoriels ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Caractérisations ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Ensembles d'applications linéaires ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Composées d'applications linéaires ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Noyau et image

1. Images directes et réciproques d'un s-ev ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Noyau et image ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Lien avec l'injectivité et la surjectivité ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Action sur une base

1. Image d'une base par une application linéaire ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Rang d'une application linéaire ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Théorème du rang ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Conséquences ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Représentation matricielle en dimension finie

1. Matrice d'une application linéaire
2. Image d'un vecteur ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Application linéaire associée à une matrice
4. Correspondance des opérations ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Matrices de passage entre deux bases ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Formules de changement de bases ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

1.1 Définition d'une AL : $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire (un morphisme) si et seulement si

- * $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$
- * $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$

f endomorphisme : linéaire de E dans E ,

f isomorphisme : linéaire et bijective de E dans F ,

f automorphisme : linéaire et bijective de E dans E .

1.2 Caractérisations :

- $f : E \longrightarrow F$ est linéaire $\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$
- Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

1.3 Ensembles d'AL : $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E vers F .
 $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E .
 $\mathcal{GL}(E, F)$ est l'ensemble des isomorphismes de E vers F .
 $\mathcal{GL}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E .

$\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des $\mathbf{K}$ -ev : $f, g \in \mathcal{L}(E, F), \lambda \in \mathbf{K} \Rightarrow (\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$.

1.4 Composées d'AL :

- Une composée d'AL est linéaire : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$
- Si f est un isomorphisme, alors sa réciproque f^{-1} est linéaire.

2.1 Images directes et réciproques de s-ev : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, si E_1 est un s-ev de E et F_1 un s-ev de F , alors $f(E_1)$ est un s-ev de F et $f^{-1}(F_1)$ est un s-ev de E .

2.2 Noyau, image d'une AL : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le noyau de f , noté $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle par f :

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

- L'image de f , notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble de toutes les images par f des vecteurs de E :

$$\text{Im}(f) = \{f(u), u \in E\} = f(E)$$

- $\text{Ker}(f)$ est un s-ev de E , $\text{Im}(f)$ est un s-ev de F .

2.3 Lien avec injectivité et surjectivité : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$$

3.1 Image d'une base par une AL : Soit $\mathcal{B}$ une base de E , soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est entièrement déterminée, et de façon unique, par $f(\mathcal{B})$.
- $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de $F \Leftrightarrow f$ est injective.
- $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $F \Leftrightarrow f$ est surjective.

3.2 Rang d'une AL : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f(\mathcal{B}))$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E .

3.3 Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. Alors : $\dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f) = \dim(E)$

3.4 Conséquence : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

$$\text{Alors : } f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

4.2 Image d'un vecteur : $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$, $v = f(u)$, $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{B}'$ base de F

$$\text{Si } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f), X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v), \text{ alors : } Y = AX$$

4.4 Opérations avec les matrices : $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases respectivement des espaces vectoriels E, F, G .

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbf{K}$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbf{N}$, alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n$

- Si $f \in \mathcal{GL}(E, F)$, alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))^{-1}$

4.5 Matrices de passage : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Alors $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$

4.6a Changement de bases pour une application linéaire :

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E . On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F . On note $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$. Alors : $A' = Q^{-1}AP$

4.6b Changement de bases pour un endomorphisme :

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E . On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors : $A' = P^{-1}AP$