

**Programme de colles**  
**Semaine 30 du 10/06 au 14/06/2024**

**Chapitre 22 : Polynômes**

1. Définition, degré, ensembles  $\mathbf{K}[X]$  et  $\mathbf{K}_n[X]$ . Monôme dominant, coefficient dominant. Cas d'égalité.
2. Opérations : somme, produit par une constante, produit, composée. Conséquences sur le degré.
3. Dérivée, degré du polynôme dérivé.
4. Racines, multiplicité. Lien avec la factorisation, annulation des dérivées successives.
5. Polynôme scindé, théorème de D'Alembert-Gauss, décomposition dans  $\mathbf{C}[X]$  et dans  $\mathbf{R}[X]$ .

*Techniques exigibles :*

- \* Analyse des degrés dans une égalité entre polynômes.
- \* Identification des coefficients dans une égalité entre polynômes.
- \* Factorisation par  $(X - a)^m$  étant donnée une racine  $a$  de multiplicité  $m$ .
- \* Obtention de la multiplicité d'une racine par examen des dérivées successives.

**Chapitre 23 : Applications linéaires de  $\mathbf{K}^n$  dans  $\mathbf{K}^p$** 

1. Application linéaire :  $E = \mathbf{K}^n \rightarrow F = \mathbf{K}^p$ . Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
2. Caractérisation :  $f \in \mathcal{L}(E, F) \Leftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ .
3. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.
4. Noyau et image d'une application linéaire. Étude de dimension, détermination de bases.
5. Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité à l'aide du noyau ou de l'image.
6. Action d'une application linéaire sur une base.
7. Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité à l'aide de l'image d'une base.
8. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.  
Équivalence entre injectivité et surjectivité lorsque  $\dim(E) = \dim(F)$ .
9. Matrice d'une application linéaire relativement à des bases, application linéaire canoniquement associée à une matrice  $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ .
10. Correspondance entre les opérations sur les applications linéaires et les opérations matricielles.
11. Formules de changement de bases.

**Liste des questions de cours :**

1. Si  $P, Q \in \mathbf{K}[X]$  de degrés respectifs  $n, m \geq 0$ , donner les degrés de :  $P + Q, P \times Q, P \circ Q, P'$ .  
*On pourra distinguer plusieurs cas concernant  $P + Q$ .*
2. Double caractérisation de :  $\alpha \in \mathbf{K}$  est racine de  $P \in \mathbf{K}[X]$  de multiplicité  $m \in \mathbf{N}^*$ .
3. **Exercice-type** : Factoriser dans  $\mathbf{R}[X]$  le polynôme :  $4X^4 - 12X^3 + 9X^2 + 2X - 3$ .  
*L'examineur pourra proposer tout autre polynôme impliquant les mêmes techniques.*
4. Donner la caractérisation d'une application linéaire. Que dire alors de l'image du vecteur nul ?
5. Définir le noyau d'une application linéaire. Que dire s'il ne contient que le vecteur nul ?
6. Définir l'image  $\text{Im}(f)$  d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ . Que dire si  $\text{Im}(f) = F$  ?
7. Définir le rang d'une application linéaire. Énoncer le théorème du rang.
8. Écriture matricielle de  $f(u) = v$ , où  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Définir précisément les matrices utilisées.
9. Relation matricielle entre  $A, A'$  et  $P$  lorsque les matrices  $A$  et  $A'$  représentent un même endomorphisme  $f$  relativement à des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , avec  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

## Informatique (en langage *Python*) :

1. Déclaration d'une variable : affectation (=)
2. Importations à partir du module `math`.
3. Syntaxe de définition d'une fonction.
4. Boucle `for` ou `while`. Applications aux calculs de sommes ou de produits.
5. Booléens `True`, `False`, comparaisons (`==`, `!=`, `>`, `>=`, `<`, `<=`), tests.
6. Listes, chaînes de caractères et tuples. Indexation, extraction, concaténation.
7. Modules `matplotlib.pyplot` (`plt`) et `numpy` (`np`) : représentations graphiques.
8. Fonctions récursives : cas de base, appel récursif.
9. Simulation du hasard : le module `random` (`rd`).
10. Algorithme de dichotomie (corollaire 1 du TVI).
11. Calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur  $[a, b]$  par la "méthode des rectangles".

Mots clés à connaître : `from import as def return for while if elif else`

Fonctions à connaître : `range len append np.linspace plt.plot plt.show rd.random rd.randint rd.choice`

*Bon courage à tous !*